

# PLANCHE Y

## ESPACES VECTORIELS

### □ Exercice Y1

Si  $E$  et  $F$  sont deux  $\mathbb{K}$ -ev, en munissant l'ensemble  $E \times F$  des lois *naturelles*, montrer que l'on obtient un autre  $\mathbb{K}$ -ev, appelé *espace produit*.

### □ Exercice Y2 (Vérifier les propriétés de définition d'un espace vectoriel)

Les sous-ensembles suivants de  $\mathbb{R}^2$  sont-ils des  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels ? (On pourra s'aider d'une représentation géométrique.)

$$E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x - y = 1\}, \quad E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \leq y\}, \quad E_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / xy = 0\},$$

$$E_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$$

### □ Exercice Y3 (Une propriété du cours à démontrer)

**Q1** Démontrer que  $(\alpha = 0_{\mathbb{K}} \text{ ou } x = 0_E) \iff \alpha \cdot x = 0_E$

(Indic :  $\implies$  :  $(0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}}) \cdot x = 0_{\mathbb{K}} \cdot x$  et  $\alpha \cdot (0_E + 0_E) = \dots$  ;  $\impliedby$  : *supp.*  $\alpha \neq 0 \dots$ )

**Q2** Puis que  $\alpha \cdot (-x) = -(\alpha \cdot x) = (-\alpha) \cdot x$  (Indic :  $\alpha \cdot (-x) + \alpha \cdot x = \dots$  et  $(-\alpha) \cdot x + \alpha \cdot x = \dots$ )

### □ Exercice Y4 (Démontrer qu'un espace est vectoriel par la caractérisation des sev)

**Q1** Les sous-ensembles suivants de  $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  sont-ils des  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels ? (pour la négative, justifier par une phrase du type : « l'ensemble ... (n'est pas) stable par ... » et par un contre-exemple.)

$A$  : ensemble des suites convergentes.       $B$  : ensemble des suites convergeant vers 1.

$C$  : ensemble des suites arithmétiques.       $D$  : ensemble des suites géométriques.

$E$  : ensemble des suites négligeables devant  $\frac{1}{n}$ .       $F$  : ensemble des suites équivalentes à  $\frac{1}{n}$ .

$G$  : ensemble des suites  $(u_n)$  vérifiant  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ .

**Q2** Parmi les sous-ensembles du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , lesquels sont des espaces vectoriels ?

$$F = \{f \in E / f \geq 0\} \quad G = \{f \in E / f \text{ paire}\} \quad H = \{f \in E / f(0) = 1\}$$

$$I = \{f : x \mapsto a \sin(x) + b \cos(x), (a, b) \in \mathbb{R}^2\} \quad K = \{f \in E / f \text{ périodique}\}$$

$$L = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f'' - 2f' + 3f = 0\}$$

### □ Exercice Y5

Soit  $F$  et  $G$  deux sev de  $E$ .

**Q1**  $F \setminus G$  est-il un sev de  $E$  ?  $\mathbb{C}_E F$  est-il un sev de  $E$  ?

**Q2** Soit  $x \in F$  et  $y \in E \setminus F$ . Montrer que  $x + y \notin F$

**Q3** Montrer que  $F \cup G$  est un sev de  $E$  si et seulement si  $F \subset G$  ou  $G \subset F$ .

**Q4**  $\mathbb{R}$  est-il un sev du  $\mathbb{R}$ -ev  $\mathbb{C}$  ?  $\mathbb{R}$  est-il un sev du  $\mathbb{C}$ -ev  $\mathbb{C}$  ?

### □ Exercice Y6 (Famille génératrice)

On considère dans  $\mathbb{R}^3$  le sous-ensemble  $F = \{(x - 2y, 2x + y, 3x - 2y), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ . Montrer que  $F$  est un ev en exhibant une famille qui engendre  $F$  (on parle de famille génératrice).

### □ Exercice Y7 (Trouver des générateurs)

Montrer que les sous-ensembles considérés sont des  $\mathbb{R}$ -ev en exhibant une famille génératrice :

**Q1** Dans  $\mathbb{R}^2$  on considère  $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y = 0\}$ .

**Q2** Dans  $\mathbb{R}^4$  :  $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y + z + t = 0\}$ ,  $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / y - z + t = 0\}$  et  $H = F \cap G$ .

**Q3** Dans  $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , on considère  $L = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f'' + f = 0\}$

**Q4** Dans  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , on considère  $M = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f' + tf = 0\}$

**Q5** Dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , on considère  $N = \left\{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, M = \begin{pmatrix} a & 2b - a \\ 3b & a - b \end{pmatrix} \right\}$

### Exercice Y8 (Familles libres)

**Q1** La famille  $x_1 = (1, 1, 1)$ ,  $x_2 = (1, 2, -1)$  et  $x_3 = (-1, 1, 1)$  est-elle libre dans  $\mathbb{R}^3$  ?

**Q2** La famille  $x_1 = (-1, 1, 0)$ ,  $x_2 = (0, -1, 1)$  et  $x_3 = (1, 0, -1)$  est-elle libre dans  $\mathbb{R}^3$  ?

**Q3** La famille  $\{1 + X, X + X^2, 1 + X^2\}$  est-elle libre dans  $\mathbb{R}[X]$  ?

**Q4** La famille  $(\sin, \cos)$  est-elle libre dans  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  ?

**Q5** À quelle condition nécessaire et suffisante le vecteur  $x \in E$  forme-t-il une famille libre de  $E$  ?

**Q6** Dans le plan vectoriel usuel comment appelle-t-on deux vecteurs formant une famille liée ?

### Exercice Y9 (Familles libres)

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on définit  $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(nx) \in \mathbb{R}$ .

Montrer que la famille  $(f_1, f_2, \dots, f_n)$  est libre dans  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

(indic : faire une récurrence et dériver deux fois...)

### Exercice Y10 (Familles libres)

Soit  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  une famille de  $E$  telle que :

$$x_1 \neq 0 \text{ et } \forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, x_k \notin \text{Vect}(x_1, \dots, x_{k-1})$$

Montrer que cette famille est libre.

Application : toute famille de polynômes non nuls à coefficients dans  $\mathbb{K}$  et de degrés échelonnés est libre.

### Exercice Y11 (Base)

**Q1** Démontrer que les matrices  $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  forment une base de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

**Q2** Déterminer les coordonnées de  $M = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  dans cette base.

### Exercice Y12 (Sommes de sev)

Soit  $F, G$  et  $H$  trois sev de  $E$ . Comparer  $F \cap (G + H)$  et  $(F \cap G) + (F \cap H)$

### Exercice Y13 (Sommes directes)

On considère l'ev  $E = \mathbb{R}^3$ . Notons  $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in E / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$  et  $G = \text{Vect}((1, 1, 1))$ . Montrer que  $F$  et  $G$  sont en somme directe.

**□ Exercice Y14 (Espaces supplémentaires)**

**Q1** Soit les ensembles  $F_1 = \{(0, y, z), (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$  et  $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 3y - z = 0\}$ .

- Montrer que  $F_1$  et  $F_2$  sont des plans vectoriels.
- Trouver des générateurs des ensembles  $F_1 \cap F_2$  et  $F_1 + F_2$ .
- A-t-on :  $F_1 \oplus F_2 = \mathbb{R}^3$  ?  $F_1 \oplus (F_1 \cap F_2) = \mathbb{R}^3$  ?  
Proposer un supplémentaire de  $F_2$  dans  $\mathbb{R}^3$ .

**Q2** On définit les deux ensembles suivants :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & -a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \text{ et } G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ b & b-a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

- Montrer que  $F$  et  $G$  sont des  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels.
- $F$  et  $G$  sont-ils deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  ?

**Q3** Dans l'espace  $E = C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , on considère l'ensemble  $C$  des fonctions de  $E$  constantes, et l'ensemble

$$H = \left\{ f \in E / \int_0^{2\pi} f(t) dt = 0 \right\}. \text{ Justifier que } C \text{ et } H \text{ sont des } \mathbb{R}\text{-ev supplémentaires dans } E.$$