

# CHAPITRE

# *V*



TSI<sup>1</sup>

Lycée Artaud

2025/2026

# Espaces vectoriels

---

## Sommaire

<b>I</b>	<b>Espaces vectoriels</b>	<b>2</b>
I.1	Définition	2
I.2	Espaces vectoriels de références	3
<b>II</b>	<b>Sous-espaces vectoriels</b>	<b>3</b>
II.1	Définition d'un sous-espace vectoriel	3
II.2	Exemples classiques	3
II.3	Sous-espace engendré par une famille finie	4
<b>III</b>	<b>Qu'est-ce qu'une <i>base</i> pour un <i>ev</i> ?</b>	<b>5</b>
III.1	Famille génératrice	5
III.2	Familles libres	5
III.3	Bases	7
<b>IV</b>	<b>Sommes de <i>sev</i>, sommes directes</b>	<b>8</b>
IV.1	Somme de <i>sev</i>	8
IV.2	Somme directe de <i>sev</i>	9
IV.3	<i>Sev</i> supplémentaires	9

---



**Preuve**

En exos pour les curieux... □

**I.2 Espaces vectoriels de références**

On peut se convaincre (et/ou démontrer) que les structures suivantes munies de leurs lois *usuelles* sont des espaces vectoriels :

$$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \quad \mathbb{K}[X] \quad \mathbb{K}^n \quad \mathcal{F}(A, \mathbb{K}) \quad \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$$

□ ↗ Exercice Y.1

□ ↗ Exercice Y.2

□ ↗ Exercice Y.3

**II Sous-espaces vectoriels****II.1 Définition d'un sous-espace vectoriel**

## ♪ Définition II.1.1

Soit  $F \subset E$ . On dit que  $F$  est un **sous-espace vectoriel de  $E$**  s'il n'est pas vide et s'il est stable par combinaison linéaire, c'est à dire :

$$F \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \quad \forall (x, y) \in F^2, \quad \alpha x + \beta y \in F$$

**REMARQUES –**

- Si  $F$  est un sev de  $E$  alors il contient nécessairement  $0_E$ .
- $0_E$  et  $E$  sont des sev de  $E$ .

**EXEMPLE –** On considère les ensembles  $F$  et  $G$  définies respectivement par :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 1\}.$$

$F$  et  $G$  sont-ils des sev de  $\mathbb{R}^3$  ?

S2

**II.2 Exemples classiques**

- Si  $X$  est un ensemble,  $\mathcal{C}^1(X)$  est un sev de  $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ .
- Les solutions sur un intervalle  $I$  d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1, homogène est un sev de  $\mathcal{C}^1(I)$
- L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène de  $n$  équations à  $p$  inconnues et à coefficients de  $\mathbb{K}$  est un sev de  $\mathbb{K}^p$

- L'ensemble des matrices diagonales est un sev de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
- même chose avec triangulaires, symétriques, antisymétriques...
- ...

**MÉTHODE** – En pratique, pour démontrer qu'un ensemble est muni d'une structure d'espace vectoriel, on montre que c'est un sev d'un des ev de référence.

**Propriété II.2.1**

Si  $(F_i)_{i \in I}$  est une famille finie non vide de sev de  $E$ , alors  $\bigcap_{i \in I}$  est un sev de  $E$ .

**Preuve**

Montrons cette propriété pour une famille de deux sous-ensembles :

S3

□

**II.3 Sous-espace engendré par une famille finie**

On considère une famille non vide de  $n$  vecteurs de  $E$  :  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . On note  $Vect(a_1, a_2, \dots, a_n)$  l'ensemble des combinaisons linéaires formées à partir de la famille des  $(a_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ , c'est à dire :

$$Vect(a_1, a_2, \dots, a_n) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i, \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \right\}$$

**Propriété II.3.1**

$Vect(a_1, a_2, \dots, a_n)$  est un sev de  $E$ . C'est de plus *le plus petit* qui contient tous les  $(a_i)$ . Il s'appelle **l'espace vectoriel engendré par la famille  $(a_1, \dots, a_n)$** .

**Preuve**

S4

□



EXEMPLE –

- Donner une famille libre dans le  $\mathbb{R}$ -ev  $\mathbb{C}$  : .....  
Est-elle libre si on le considère comme un  $\mathbb{C}$ -ev ? .....
- Donner une famille libre dans  $\mathbb{R}^3$  : .....
- Toute famille de polynômes non nuls à coefficients dans  $\mathbb{K}$  et de degrés échelonnés est libre.

REMARQUES –

- Une famille  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  est libre signifie qu'aucun  $x_i$  ne peut s'exprimer comme combinaison linéaire des autres.
- Pour montrer qu'une famille est libre, la plupart du temps on considère une combinaison linéaire nulle et on essaye de montrer que tous les scalaires sont nécessairement nuls (on utilise la définition).  
Par exemple, montrons que toute famille de polynômes non nuls à coefficients dans  $\mathbb{K}$  et de degrés échelonnés est libre.

S6

**Propriété III.2.2 (Unicité de la décomposition)**

Si  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  est une famille libre de  $E$  alors tout vecteur  $x \in Vect(x_1, \dots, x_n)$  se décompose de façon **unique** en les vecteurs  $x_1, \dots, x_n$ .

Preuve

S7

□

**Propriété III.2.3**

- Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
- Toute sur-famille d'une famille liée est liée.

**Preuve**

S8

**EXEMPLE –**

- La famille  $(1, \sin, \cos, \cos^2, \sin^2)$  est une famille liée dans  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  car : .....
- Donner une famille liée de 3 vecteurs deux à deux non colinéaires dans le plan usuel : .....

Exercice Y.8

Exercice Y.9

Exercice Y.10

**III.3 Bases**

**♪ Définition III.3.1 (base)**

Une **base de  $E$**  est une famille libre et génératrice de  $E$ .

**☉ Théorème III.3.2 (unicité de la décomposition dans une base)**

Supposons que  $E$  possède une base  $(e_1, \dots, e_n)$ . Alors pour tout vecteur  $x \in E$ , il existe une unique famille  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$  telle que  $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$

**Preuve**

S9

EXEMPLE – Donner une base de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$

S10

**Vocabulaire :**

- On appelle *droite vectorielle* un  $\mathbb{K}$ -ev ayant une base formée d'un seul vecteur.
- On appelle *plan vectoriel* un  $\mathbb{K}$ -ev ayant une base formée d'exactly 2 vecteurs. (on en reparlera dans le chapitre "dimension finie"....)

☐ ↗ Exercice Y.11

## IV Sommes de sev, sommes directes

### IV.1 Somme de sev

**Propriété IV.1.1 (somme de sev)**

Si  $F$  et  $G$  sont deux sev de  $E$  alors l'ensemble  $H$  défini par :  $H = \{y + z / (y, z) \in F \times G\}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ . C'est de plus le plus petit qui contient  $F$  et  $G$ . On l'appelle **somme de  $F$  et  $G$**  et on note  $H = F + G$ .

**Preuve**

S11

**Rappel :** si  $F$  et  $G$  sont des sev de  $E$ , à quelle condition  $F \cup G$  est-il un sev de  $E$  ? .....

EXEMPLE – Si  $E$  est un ev et  $F$  un sev de  $E$ , décrire  $F + \{0\}$ ,  $F + E$  et  $F + F$ .

S12

☐ ↗ Exercice Y.12

## IV.2 Somme directe de sev

### ♪ Définition IV.2.1

Les sev  $F$  et  $G$  sont dits en **somme directe** si pour tout  $z \in F + G$ , la décomposition  $z = x + y$  avec  $x \in F$  et  $y \in G$  est unique. Dans ce cas-là la somme se note  $F \oplus G$ .

**REMARQUES** – La caractère *direct* pour une somme est une propriété qu'elle possède ou pas.

### Propriété IV.2.2 (caractérisation)

Les sev  $F$  et  $G$  sont en somme directe si et seulement si  $F \cap G = \{0\}$

### Preuve

S13

□

**EXEMPLE** – Soient  $a$  et  $b$  deux vecteurs non nuls de  $E$ . À quelle condition nécessaire et suffisante, la somme  $\text{Vect}(a) + \text{Vect}(b)$  est-elle directe ? .....

### □ ↪ Exercice Y.13

## IV.3 Sev supplémentaires

### ♪ Définition IV.3.1 (sev supplémentaires)

On dit que les sev  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $E$  lorsque l'on a :  $E = F \oplus G$ .

On retiendra la caractérisation suivante pour démontrer que deux espaces sont supplémentaires :

### Propriété IV.3.2 (Caractérisation)

On a  $E = F \oplus G$  si et seulement si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

- (i) Pour tout  $x \in E$ , il existe un unique  $(y, z) \in F \times G$  tel que  $x = y + z$ ,
- (ii) La somme  $F + G$  est directe et égale à  $E$ ,
- (iii) On a  $E = F + G$  et  $F \cap G = \{0\}$ .

Les preuves découlent directement des définitions...

**EXEMPLE** – Donner des exemples simples (à l'aide de croquis) d'espaces supplémentaires en géométrie vectorielle plane ou dans l'espace :

