(Y9) Notons $f_n : x \longmapsto \sin nx$

et $\mathcal{F}_n = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$. Mq $\mathcal{F}_n$ libre.

Procédons par récurrence sur n :

(I) $\mathcal{F}_1 = \{f_1\}$ est libre. En effet :

$$\alpha_1 f_1 = 0 \iff \forall x \in \mathbb{R},\ \alpha_1 \sin(x) = 0$$
$$\iff \alpha_1 = 0.$$

(H) Supp que pour un certain $n \geqslant 1$ on a $\mathcal{F}_n$ libre

et mq $\mathcal{F}_{n+1}$ libre :

On considère : $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \dots + \alpha_n f_n + \alpha_{n+1} f_{n+1} = 0$

$\iff \forall x \in \mathbb{R},\ \alpha_1 \sin(x) + \alpha_2 \sin(2x) + \dots + \alpha_{n+1} \sin((n+1)x) = 0$

En dérivant 2 fois on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \alpha_1 + 4\alpha_2 \sin(2x) + \dots + n^2 \alpha_n \sin(nx) + (n+1)^2 \alpha_{n+1} \sin((n+1)x) = 0$$

Alors en multipliant la 1ère équation par $(n+1)^2$ et en soustrayant la 2e on trouve :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \alpha_1((n+1)^2 - 1)\sin(x) + \dots + \alpha_n((n+1)^2 - n^2)\sin(nx) + 0 = 0$$

Mais $\mathcal{F}_n$ est libre (H.R), donc :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\},\ \alpha_i((n+1)^2 - i^2) = 0$$

Or $(n+1)^2 > i^2$, donc : $\forall i \in \{1, \dots, n\},\ \alpha_i = 0$

Il reste alors dans la 1e éq. : $(n+1)^2 \alpha_{n+1} \sin((n+1)x) = 0$

D'où $\alpha_{n+1} = 0$ (ie) $\mathcal{F}_{n+1}$ libre.

(C) Conclusion : On a initialisé pour $n = 1$ et montré l'hérédité, donc :

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ \{f_1, \dots, f_n\} \text{ libre.}}$$

Y10 Considérons :

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = 0$$

Supposons par l'absurde qu'il existe un $\lambda_i \neq 0$, et notons λ_{i_0} celui d'indice le plus grand. On a :

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_{i_0-1} x_{i_0-1} = -\lambda_{i_0} x_{i_0}$$

D'où $x_{i_0} \in \mathrm{Vect}\{x_1, \dots, x_{i_0-1}\}$ ce qui est exclu.

Donc $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \lambda_i = 0$ et $\{x_1, \dots, x_n\}$ libre.

__Application__ : dans $\mathbb{R}_n[X]$, une famille de poly de degrés échelonnés vérifie l'hypothèse précédente ($P_1 \neq 0$ et $\forall k \geq 1$, $P_k \notin \mathrm{Vect}(\{P_1, \dots, P_{k-1}\})$).
Donc cette famille est libre.

VII) **Q1 et Q2** : Pour montrer que $B = \{A_1, \dots, A_4\}$ est une base, prenons une matrice quelconque

$M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ et montrons qu'il existe un unique

quadruplet (a, b, c, d) tq : $M = aA_1 + bA_2 + cA_3 + dA_4$.

En effet :

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -d \\ d & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b = x \\ c-d = y \\ c+d = z \\ a-b = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = x \\ a = \frac{x+t}{2} \\ c+d = z \\ c = \frac{y+z}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = (x+t)/2 \\ b = (x-t)/2 \\ c = (y+z)/2 \\ d = (z-y)/2 \end{cases}$$

On déduit que $\boxed{\{A_1, \dots, A_4\} \text{ est une base}}$.

Application : ici $x = 3$, $y = 0$, $z = 1$, $t = 2$

D'où $\boxed{M = \frac{5}{2} A_1 + \frac{1}{2} A_2 + \frac{1}{2} A_3 + \frac{1}{2} A_4}$

7/13 Il suffit de mq $F \cap G = \{0\}$.

Pour cela, prenons $g \in G$. On a $g = (d,d,d)$

Si $g \in F \cap G$ alors $g \in F$, donc : $d + d + d = 0$

D'où $d = 0$, ie $g = 0$.

Conclusion : $F \cap G \subset \{0\}$.

Or on a toujours $\{0\} \subset F \cap G$.

Donc $F \cap G = \{0\}$ et la somme est directe

7/14 **Q1.** en colle...

Q2a. * Mq F sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

Prenons $\alpha \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & -a \end{pmatrix} \in F$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & 2b' \\ b' & -a' \end{pmatrix} \in F$.

- $A + A' = \begin{pmatrix} a+a' & 2(b+b') \\ b+b' & -(a+a') \end{pmatrix} \in F$.
- $\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a & 2\alpha b \\ \alpha b & -\alpha a \end{pmatrix} \in F$

stabilité de F par comb. lin.

et $0 \in F$ $(a=0, b=0)$. Donc $\boxed{F \text{ sev de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$

* c'est le m type de rédaction pour G.

Q2b F et G supplémentaires $\iff \begin{cases} F+G = \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ F \cap G = \{0\}. \end{cases}$

- Mq $F \cap G = \{0\}$. Soit $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in F \cap G$.

Puisque $A \in F$, $\exists (a,b)$ tq $x = a$, $y = 2b$, $z = b$, $t = -a$
et $A \in G$, $\exists (a',b')$ tq $x = a'$, $y = 2a'+b'$ $z = b'$, $t = b'-a'$

On déduit : $a = a'$ (x), $b = b'$ (z)

et $\begin{cases} 2a + b = 2b & (y) \\ b - a = -a & (t) \end{cases}$ d'où $b = 0$ et $a = 0$

Donc $A = 0$, (ie) $F \cap G = \{0\}$.

- Mq $F + G = \mathbb{R}^3$

Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cherchons $A \in F$ et $B \in G$ tq $M = A + B$:

$$\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & 2a'+b' \\ b' & b'-a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} a + a' = x \\ 2a' + 2b + b' = y \\ b + b' = z \\ -2a + b' = t \end{cases}$$

Matrice associée au syst : $S = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 2 & 2 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 & 1 & z \\ -2 & 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right)$

$$S \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 2 & 2 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 & 1 & z \\ 0 & 2 & 0 & 1 & t+2x \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 2 & 2 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 & 1 & z \\ 0 & 0 & 2 & 0 & y-t-2x \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 2 & 2 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & -2 & y-t-2x-2z \end{array}\right)$$

$rg = 4$, 4 inc. $\longrightarrow$ unique solution

Donc $F + G = \mathbb{R}^3$.

(R) Le système prouve au passage l'unicité de la solution, donc on n'avait pas besoin de voir si $F \cap G = \{0\}$.

Conclusion $\boxed{F \oplus G = \mathbb{R}^3}$

(R) Quand on aura fait le chap "Dimensions" on verra comment aller bien + vite !

Q3. * C est 1 sev de E (trivial)

* H est 1 sev de E car :
  - $0 \in H$
  - Si $h_1 \in H$ et $h_2 \in H$ on a :
  $$\int_0^{2\pi} (h_1 + h_2)(t)\,dt = \int_0^{2\pi} h_1(t)\,dt + \int_0^{2\pi} h_2(t)\,dt = 0.$$
  - Pareil avec $\alpha h_1 \in H$ ....

* Mq la somme est directe en vérifiant $C \cap H = \{0\}$:
prenons $f \in C \cap H$: On a $f(x) = k$ $\forall x \in \mathbb{R}$.
Or $f \in H$, donc $\int_0^{2\pi} k\,dt = 0$ (ie) $k \times 2\pi = 0$

D'où $k = 0$, (ie) $f = 0$. $\boxed{C \cap H = \{0\}}$

* Décomposition : mq $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}) = C + H$.

- Faisons une courte analyse : prenons $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ et supp. qu'il existe $c \in C$ et $h \in H$ tq $f = c + h$.

Alors :
$$c = f - h \quad \text{et} \quad \underbrace{\int_0^{2\pi} c\,dt}_{=2\pi c} = \int_0^{2\pi} f(t)\,dt - \underbrace{\int_0^{2\pi} h(t)\,dt}_{=0}$$

D'où nécessairement : $c = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\,dt$.

- Synthèse : soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ alors :

$$f = \underbrace{f - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\,dt}_{h} + \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\,dt}_{\in C}$$

et
$$\int_0^{2\pi} h(t)\,dt = \int_0^{2\pi} f(t)\,dt - \int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{1}{2\pi} \times \int_0^{2\pi} f(t)\,dt}_{cte}\,dt$$
$$= \int_0^{2\pi} f(t)\,dt - \frac{1}{2\pi} \times \int_0^{2\pi} f(t)\,dt \times 2\pi$$
$$= 0 \quad \text{donc } h \in H.$$

* Conclusion : $\boxed{\mathcal{C}^0(\mathbb{R}) = C \oplus H}$