

PLANCHE X

ÉQUIVALENTS /DL

□ Exercice X1

Donner une condition nécessaire et suffisante sur α et β pour avoir $n^\alpha = o(n^\beta)$.

□ Exercice X2 (Domination)

Q1 Pour $a \in \mathbb{R}$, posons $u_n = \frac{a^n}{n!}$. Montrer l'existence d'un entier naturel n_0 tel que :

$$\forall k \geq n_0 \quad \frac{|u_{k+1}|}{|u_k|} \leq \frac{1}{2}$$

Q2 En déduire que $u_n \rightarrow 0$, c'est à dire que $a^n = o(n!)$

□ Exercice X3

Compléter (en justifiant) les phrases :

Q1 Si u est dominée par une suite v bornée, alors u est ...

Q2 Si u est dominée par une suite v qui tend vers 0, alors u ...

Q3 Si u est négligeable devant une suite bornée, alors u ...

□ Exercice X4

Q1 Soit u une suite ne s'annulant pas à partir d'un certain rang. A-t-on $u_{n+1} \sim u_n$?

Q2 Soit u une suite admettant une limite finie ℓ . A-t-on $u_n \sim \ell$?

□ Exercice X5

Soit u et v deux suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang avec $u \sim v$.

La proposition suivante est-elle vraie : si u est monotone alors v est monotone ?

□ Exercice X6

Q1 Soit α et β deux réels avec $\alpha < \beta$. Montrer que $x^\alpha \underset{+\infty}{=} o(x^\beta)$ et que $x^\beta \underset{0}{=} o(x^\alpha)$

Q2 Soit f une fonction polynomiale $\sum_{k=p}^n a_k x^k$, ou l'on suppose a_p et a_n non nuls.

Montrer que $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} a_p x^p$ et que $f(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} a_n x^n$.

□ Exercice X7

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation $x^n(1+x) - 1 = 0$, d'inconnue $x \in [0; +\infty[$.

Q1 Montrer que cette équation admet une unique solution x_n .

Q2 a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $n \ln x_n = -\ln(1+x_n)$

b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $-\frac{\ln 2}{n} \leq \ln x_n < 0$

c. En déduire la limite ℓ de (x_n) lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Q3 a. Montrer que $\ln x_n \sim -\frac{\ln 2}{n}$.

- b. À l'aide de l'équivalent classique en 0 de $\ln(1+x)$ donner un équivalent de $\ln t$ pour t au voisinage de 1, puis en déduire un équivalent simple de $x_n - \ell$.

□ Exercice X8 (Opérations)

Q1 Donner un équivalent simple de la suite $u_n = \left(n^2 + \frac{1}{n}\right)(n+1)\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}\right)$.

Q2 Donner un équivalent simple de $\sum_{k=0}^n 2^k$.

Q3 Supposons $a_n \rightarrow \ell \neq 0$. Montrer que $\sum_{k=0}^n a_k \sim n\ell$.

□ Exercice X9 (Opérations)

Q1 *Produits* :

a. Donner un équivalent simple au voisinage de l'infini de $u_n = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$

b. Donner un équivalent simple au voisinage de 0 de $f(x) = \frac{(e^x - 1)^2}{(1+x)^5 - 1}$.

Q2 *Produits « infinis »* :

a. Montrer que $n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow 1$, puis déterminer la limite de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

b. En comparant $\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ et $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, que dire quant-aux produits infinis d'équivalents ?

□ Exercice X10 (Opérations)

Q1 *Addition* :

a. Que dire sur une fonction f si au voisinage de a on a $f \sim 0$?

b. Soit $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = -x$. Donner des équivalents simples de f et g au voisinage de 0. Que dire de $f + g$? Conclure quant-à l'addition d'équivalents.

c. Trouver trois suites u , v et w telles que $u \sim v$ et $u + w$ n'est pas équivalente à $v + w$.

Q2 *Composition* :

a. Montrer que $e^{f(x)} \underset{x \rightarrow a}{\sim} e^{g(x)} \iff f(x) - g(x) \underset{x \rightarrow a}{\rightarrow} 0$.

b. Trouver f et g équivalentes au voisinage de l'infini mais telles que e^f et e^g ne le soient pas. Conclure quant-à la composition d'équivalents.

Q3 *Substitution* : Donner des équivalents simples de $\sin 2t$ en 0 et de $e^{1/x^2} - 1$ en $+\infty$.

□ Exercice X11 (Quelques limites)

On note $f(x) = x^{(x^x)} - 1$ et $g(x) = x^{(x^{x-1})}$. Déterminer les limites en 0^+ de f et g .

On rappelle l'existence d'outils numériques performants pour travailler avec les DL :

- Avec XCAS (plusieurs versions en ligne sont disponibles), par exemple [ici](#). Il y a des assistants pour calculer des limites ou des DL. La syntaxe est : `series(expression, lieu, ordre)`
Par exemple : `series(exp(x),0,2)` donne $e(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^3)$ (*Attention au "grand O"*)
- Avec Geogebra en général, et des « appliquestes » comme [ici](#).

Exercice X12 (Opérations(addition/produits))

Q1 $DL_3(0)$ de $f(x) = e^x + \ln(1+x)$

Q2 $DL_3(0)$ de $f(x) = \frac{1}{1-x} - e^x$

Q3 $DL_2(0)$ de $f(x) = e^x(1+x)^{1/3}$

Q4 $DL_6(0)$ de $f(x) = \left(\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}\right)(\cos(x)-1)$ (*essayer d'anticiper l'ordre optimal du DL de chaque facteur...*)

Exercice X13 (Opérations (composition/quotients))

- Q1 a.** On a déjà vu que $\tan x \sim x$ au voisinage de 0. En passant par la dérivée puis en prenant une primitive donner le $DL_3(0)$ de la fonction tan.
b. Recommencer le procédé pour déterminer le $DL_5(0)$ de tan.

Q2 $DL_3(0)$ de $f(x) = \frac{1}{1 - \ln(1+x)}$.

Q3 $DL_3(0)$ de $f(x) = \sqrt{1 + \tan x}$.

Q4 $DL_3(0)$ de $f(x) = \ln(1 + e^x)$

Q5 $DL_3(0)$ de $f(x) = \ln(1 + \cos(x))$

Q6 $DL_2(0)$ de $f(x) = \arctan\left(\frac{x}{1+x+x^2}\right)$.

Q7 $DL_2(0)$ de $f(x) = \ln(e^{2x} + 2e^x + 3)$

Exercice X14 (DL en $a \neq 0$)

Q1 $DL_5(\frac{\pi}{2})$ de $\cos^3 x$

Q2 $DL_3(\infty)$ de $\frac{1}{1-x}$.

Q3 $DL_n(a)$ de $\ln(x)$.

Exercice X15 (Développement asymptotique)

On considère la fonction $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$.

Q1 Montrer qu'au voisinage de $+\infty$ on $f(x) \sim x$.

Q2 Pour $x > 0$ montrer que $\frac{f(x)}{x} = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-1/2}$

Q3 Montrer que $\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{1}{2x} + \frac{3}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

Q4 Déterminer des réels a et b tels que $f(x) - (ax + b)$ tende vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ Interpréter ce résultat graphiquement.

Q5 Déterminer la position de \mathcal{C}_f par rapport à la droite précédente, au voisinage de $+\infty$.

Exercice X16 (Dev. asymptotique)

Soit $f(x) = (e \cdot x)^x$. Démontrer qu'au voisinage de 0 on a : $f(x) = 1 + x \ln x + x + o(x)$.
Cela s'appelle un développement asymptotique de f en 0.

Exercice X17 (Développement asymptotique)

On rappelle que $\cotan = \frac{\cos}{\sin}$.

Q1 Pourquoi peut-on affirmer que la fonction \cotan n'admet aucun DL en 0, à n'importe quel ordre ?

Q2 Soit la fonction $f : t \mapsto t \cotan t$.

Déterminer le DL de f en 0 à l'ordre 3. Que peut-on en déduire pour f ?

Q3 En déduire un dév. en 0 pour la fonction \cotan (appelé *développement asymptotique*).

Exercice X18 (Limites)

Q1 Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{x^3} e^{-x}$.

Q2 Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Q3 Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}\right)$

Q4 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left((\sqrt{x^2+2} - x + 1)^x\right)$.

Exercice X19 (limites)

Trouver λ tel que la fonction $f(x) = \frac{1}{\tan^2(x)} + \frac{1}{\tan^2(2x)} - \lambda \frac{1}{\tan^2(3x)}$ admette une limite finie en 0, et donner cette limite.

Exercice X20 (Étude locale de courbe)

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^{+*} par $f(x) = x^{1+\frac{1}{x}}$.

Q1 Montrer que $f(x) \sim x$ au voisinage de $+\infty$.

Q2 Donner un développement asymptotique de f à 3 termes.

Q3 La courbe représentant f admet-elle une asymptote oblique ?