

# CHAPITRE

# $\mathcal{X}$



TSI<sup>1</sup>

Lycée Artaud

2025/2026

## Analyse asymptotique Développements limités

---

### Sommaire

<b>I</b>	<b>Domination, négligeabilité, équivalence</b>	<b>3</b>
I.1	Négligeabilité, domination	3
I.1.1	Définitions	3
I.1.2	Caractérisations	3
I.1.3	Lien avec les croissances comparées	4
I.2	Équivalence	4
I.2.1	Définitions	4
I.2.2	Équivalents à connaître	4
I.2.3	Propriétés et opérations sur les équivalents	5
<b>II</b>	<b>Développements limités</b>	<b>7</b>
II.1	Généralités	7
II.1.1	Définition	7
II.1.2	Unicité, forme normalisée, troncature	7
II.1.3	Formule de Taylor-Young	8
II.1.4	Primitive d'un DL	9
II.1.5	DL à connaître par cœur	9
II.2	Opérations sur les développements limités	10
II.2.1	Addition	10
II.2.2	Produits	11
II.2.3	Composition	11
II.2.4	Quotients	12
II.2.5	Développement limité ramené à 0	12
II.2.6	Développement asymptotique	13

<b>III Application des développements limités</b>	<b>13</b>
III.1 Recherche d'une limite ou d'un équivalent . . . . .	13
III.2 Étude locale d'une fonction . . . . .	13
III.3 Utilisation de logiciel pour le calcul de DL . . . . .	14

---

# I Domination, négligeabilité, équivalence

On étudie des fonctions ou des suites, localement au voisinage d'un point  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ .

## I.1 Négligeabilité, domination

### I.1.1 Définitions

#### ♪ Définition I.1.1

$f, \varphi, u$  et  $\varepsilon$  sont des fonctions.

- On dit que  $f$  est **dominée** par  $\varphi$  au voisinage de  $a$  s'il existe  $u$  bornée au voisinage de  $a$  telle que :

$$f = \varphi \times u \quad , \text{ on note : } f \underset{a}{=} O(\varphi)$$

- On dit que  $f$  est **négligeable** devant  $\varphi$  au voisinage de  $a$  s'il existe  $\varepsilon$  qui tend vers 0 en  $a$  telle que :

$$f = \varphi \times \varepsilon \quad , \text{ on note : } f \underset{a}{=} o(\varphi)$$

#### EXEMPLE –

- sur  $\mathbb{R}^*$ ,  $x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{0}{=} O(x^2)$
- sur  $\mathbb{R}^*$ ,  $x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{0}{=} o(x)$
- $n \underset{+\infty}{=} o(n^2)$
- $\sin(n) \underset{+\infty}{=} O(1)$
- $\sin(n) \underset{+\infty}{=} o(n)$
- $\frac{1}{n^2} = o\left(\frac{1}{n}\right)$
- $\frac{\sin n}{n} = O\left(\frac{1}{n}\right)$

#### REMARQUES –

- Dire  $f$  est bornée au voisinage de  $a$  signifie  $f \underset{a}{=} O(1)$
- Dire  $f$  tend vers 0 en  $a$  signifie  $f \underset{a}{=} o(1)$

### I.1.2 Caractérisations

#### Propriété I.1.2

Soit  $f$  et  $\varphi$  définies sur  $\mathcal{D}$ . Si  $\varphi$  ne s'annule pas sur  $\mathcal{D} \setminus \{a\}$  on a :

- $f \underset{a}{=} O(\varphi) \iff \frac{f}{\varphi}$  est bornée au voisinage de  $a$ .
- $f \underset{a}{=} o(\varphi) \iff \frac{f}{\varphi}$  tend vers 0 en  $a$ .

#### Preuve

Idée : on a  $f = u \times \varphi \iff \frac{f}{\varphi} = u \dots$

□

### I.1.3 Lien avec les croissances comparées

On peut traduire les croissances comparées ainsi, pour  $a > 0$  :

- $\lim_{x \rightarrow 0} x^a \ln^b x = 0$  peut se traduire par :  $\ln^b x \underset{0}{=} \dots\dots\dots$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^b x}{x^a} = 0$  peut se traduire par :  $\ln^b x \underset{+\infty}{=} \dots\dots\dots$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^a e^x = 0$  peut se traduire par :  $e^x \underset{-\infty}{=} \dots\dots\dots$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0$  peut se traduire par :  $x^a \underset{+\infty}{=} \dots\dots\dots$

## I.2 Équivalence

### I.2.1 Définitions

#### Propriété I.2.1 (et définition)

Si  $f$  et  $g$  sont définies sur  $\mathcal{D}$  il revient au même de dire :

1.  $f \underset{a}{=} g \times u$  avec  $u$  qui tend vers 1 en  $a$
2.  $f - g \underset{a}{=} o(g)$

Dans ce cas on dit que  $f$  et  $g$  sont **équivalentes** au voisinage de  $a$ , et on note  $f \underset{a}{\sim} g$ .

#### Propriété I.2.2 (Caractérisation)

Si  $g$  ne s'annule pas sur  $\mathcal{D} \setminus \{a\}$  :

$$f \underset{a}{\sim} g \iff \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$$

#### Preuve

Idee :  $f - g = o(g) \iff f - g = g \times \varepsilon \iff f = g(1 + \varepsilon) \dots$  □

**EXEMPLE** – La limite bien connue  $\frac{\sin x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$  se traduit par  $\dots\dots\dots$

□ ↪ Exercice X.4

□ ↪ Exercice X.5

□ ↪ Exercice X.6

### I.2.2 Équivalents à connaître

On retiendra les équivalents suivants (que l'on retrouve en calculant la limite d'un taux d'accroissement) :

- $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$
- $\sin x \underset{0}{\sim} x$
- $\arcsin x \underset{0}{\sim} x$
- $\tan x \underset{0}{\sim} x$
- $\arctan x \underset{0}{\sim} x$
- $(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x, \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
- $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$

□ ↪ Exercice X.7

## I.2.3 Propriétés et opérations sur les équivalents

## Propriété I.2.3

Soit  $(a, \ell) \in \overline{\mathbb{R}}^2$  et  $g$  une fonction vérifiant :  $g \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$

On a l'implication :

$$f \underset{a}{\sim} g \implies f \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$$

**Attention** : réciproque fausse.

**EXEMPLE** – Donner des contre-exemples pour la réciproque ( $\ell = 0, \ell = +\infty$ ) :

S1

## Propriété I.2.4 (Conservation du signe)

Considérons deux fonctions  $f$  et  $g$  telles que  $f \underset{a}{\sim} g$ . On a :

- Si  $g$  est positive au voisinage de  $a$  alors  $f$  aussi.
- Si  $g$  ne s'annule pas au voisinage de  $a$  alors  $f$  non plus.

## Preuve

Idée :  $f = g \times h$  avec  $h \rightarrow 1$

□

**EXEMPLE** – On considère  $f(x) = x^5 + x^3 - 2x^2$ . Après avoir donné un équivalent de  $f$  au voisinage de 0, justifier que  $f$  est strictement négative au voisinage de 0 avec  $x \neq 0$  :

S2

## Propriété I.2.5 (Opérations)

Les produits et quotients sont compatibles avec les équivalents.

Si on a  $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$  et  $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$  alors :

- $f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2$
- si les quotients existent sur  $\mathcal{D} \setminus \{a\}$  :  $\frac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \frac{g_1}{g_2}$
- Pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ , si  $f_1^\alpha$  et  $g_1^\alpha$  existent alors  $f_1^\alpha \underset{a}{\sim} g_1^\alpha$ .



## II Développement limité

C'est une généralisation de l'« approximation affine » vue plus tôt dans l'année. Le principe est d'approcher localement toute fonction par une fonction polynomiale.

### II.1 Généralités

#### II.1.1 Définition

##### ♪ Définition II.1.1

On dit que  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  sur un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $a$  s'il existe des complexes  $a_1, a_2, \dots, a_n$  tels que :

$$\forall x \in \mathcal{V}, f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k}_{\text{partie régulière}} + \underbrace{o((x-a)^n)}_{=(x-a)^n \varepsilon(x)}$$

**REMARQUES** – très souvent  $a = 0$ .

**EXEMPLE** –

- $f(x) = x - 3x^3 + x^3 \sin(x)$  admet un DL en 0 à l'ordre 3 car  $\sin(x)$  tend vers 0 en 0.  
On a :  $f(x) = x - 3x^3 + o(x^3)$
- Un exemple de référence : montrer que la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  par  $f(x) = \frac{1}{1-x}$  admet un DL à tout ordre en 0 (*penser à la somme de termes géométriques...*)

S4

#### II.1.2 Unicité, forme normalisée, troncature

##### Propriété II.1.2

1. Contrairement aux équivalents, si  $f$  admet un DL à l'ordre  $n$  en  $a$ , alors celui-ci est **unique**.
2. Si  $f$  admet un DL à l'ordre  $n$  en  $a$ , alors on peut **tronquer** celui-ci pour obtenir un DL à l'ordre  $p \leq n$  en  $a$ .
3. Si  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + o(x^n)$  avec  $a_0 = \dots = a_{p-1} = 0$  et  $a_p \neq 0$ , on appelle **forme normalisée** du DL l'expression :

$$f(x) = x^p (a_p + a_{p+1}x + \dots + a_nx^{n-p} + o(x^{n-p}))$$

Et dans ce cas on a :  $f(x) \underset{0}{\sim} a_p x^p$

**Preuve**

Montrons le premier point :

S5

□

**EXEMPLE** – Donner un équiv. en 0 de  $f(x) = \frac{1}{1-x} - 1 - x$  puis en déduire son signe au voisinage de 0 :

S6

**II.1.3 Formule de Taylor-Young****Propriété II.1.3 (Taylor-Young)**

Si  $f$  est  $n$  fois dérivable en  $a$  alors elle admet un DL à l'ordre  $n$  en  $a$  et celui-ci vaut :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!} + o((x-a)^n)$$

**Preuve**

On verra la preuve dans le chapitre sur l'intégration.

□

**ATTENTION ! – La réciproque est fautive.** Une fonction  $f$  peut admettre un DL à l'ordre  $n$  sans pour autant être  $n$  fois dérivable. Contre-exemple (avec  $n = 2$ ) :

Soit  $f(x) = x + x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$  si  $x \in \mathbb{R}^*$  et  $f(0) = 0$ .

**Q1** Justifier que  $f$  admet un DL à l'ordre 2 en 0 :

S7





### II.2.2 Produits

On remarquera la troncature nécessaire des parties régulières.

**EXEMPLE** – Déterminer le  $DL_3(0)$  de  $f(x) = \frac{e^x}{1-x}$  :

S13

**EXEMPLE** – Déterminer le  $DL_2(0)$  de  $f(x) = e^x \ln(1+x)$  :

S14

On remarquera dans ce dernier exemple que l'on aurait pu anticiper le fait qu'il suffisait d'un DL à l'ordre 1 de  $\exp$  car on multipliait « a minima » par  $x \dots$

 **Exercice X.12**

### II.2.3 Composition

Voyons sur un exemple comment procéder (**noter que l'on fera toujours bien attention de voir en quels points les divers DL sont calculés**) :

**EXEMPLE** – Déterminer le  $DL_4(0)$  de  $f(x) = \ln(1 + \sin x)$  :

S15

**EXEMPLE** – Voir le paragraphe suivant « quotients » où l'on va encore utiliser la composition.

## II.2.4 Quotients

**ATTENTION !** – On ne traite ici que le cas où le dénominateur ne tend pas vers 0 au point où l'on souhaite calculer le DL.

**MÉTHODE** – On essaye de se ramener au DL de  $\frac{1}{1-u}$  avec  $u$  qui tend vers 0.

**EXEMPLE** – Déterminer le  $DL_3(0)$  de  $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$  :

→ on commence par faire le DL de  $e^x$  puis on se ramène à  $\frac{1}{1-u}$  et on utilise la même technique que pour la composition :

S16

**EXEMPLE** – Déterminer le  $DL_3(0)$  de  $\tan x$  :

S17

✎ Exercice X.13

## II.2.5 Développement limité ramené à 0

**MÉTHODE** – Si l'on doit calculer le DL d'une fonction  $f$  en un point  $x_0 \neq 0$ , on peut :

- se ramener à 0 en considérant la fonction  $g$  définie au voisinage de 0 par  $g(h) = f(x_0 + h)$
- ou utiliser directement Taylor-Young



**EXEMPLE** – Soit  $f(x) = \frac{1}{1 + e^x}$ . Donner la position de  $\mathcal{C}_f$  par rapport à sa tangente en  $x_0 = 0$  :

S20

☐ **Exercice X.20**

### III.3 Utilisation de logiciel pour le calcul de DL

Afin de contrôler les calculs de DL ou d'effectuer des calculs compliqués on aura recours à un logiciel de calcul formel.

- Par exemple XCAS et sa [version en ligne](#) en tapant :

```
→ series( expression, lieu, ordre)
```

Par exemple : `series(tan(x),0,5)` donne  $x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5 + O(x^5)$   
*(Attention XCAS donne un « grand O »).*

- Ou utiliser le calcul formel de python avec le package `sympy`. [version en ligne](#) en tapant :

```
→ series( expression, variable, lieu, ordre)
```

Par exemple : `series(tan(x),x,0,5)` donne  $x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5 + O(x^5)$   
*(Attention sympy donne un « grand O »).*

- Ou GEOGEBRA et sa [version en ligne](#) en tapant :

```
→ PolynômeTaylor( expression, lieu, ordre) donne la partie régulière du DL.
```

Par exemple la *version classique* : `PolynômeTaylor(tan(x),0,5)` donne  $x + 2\frac{x^3}{3!} + 16\frac{x^5}{5!}$   
 et la *version formelle* donne directement l'expression simplifiée :  $x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5$

- Ou encore mieux, utiliser une application GEOGEBRA toute faite comme [celle-ci](#).