Corrigé DL

X16 $f(x) = (e.x)^x = e^x e^{x\ln x}$

Développement en $o(x)$

En 0 : • $e^x = 1 + x + o(x)$

• comme $x\ln x \xrightarrow[0]{} 0$ on a aussi : (substitution)

$$e^{x\ln x} = 1 + x\ln x + \frac{x^2\ln^2 x}{2!} + o(x^2\ln^2 x)$$
$$= 1 + x\ln x + o(x)$$

⚠ 2e ordre nécess.

Produit : $f(x) = (1 + x + o(x))(1 + x\ln x + o(x))$

$$\boxed{f(x) = 1 + x\ln x + x + o(x)}$$

Car $\dfrac{x^2\ln^2 x}{x} = x\ln^2 x \xrightarrow[0]{} 0$ donc $x^2\ln^2 x \underset{0}{=} o(x)$

(R) Si on était allé à $o(x^2)$ on aurait trouvé :

$$f(x) = 1 + x\ln x + x + \frac{x^2\ln^2 x}{2} + x^2\ln x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

On retiendra : $x^n \ln^p(x) \underset{0}{=} o(x^{n-1})$ $\forall p \geq 0$

X17 **Q1.** cotan n'admet pas de DL en 0

car $\lim_{x \to 0} \cotan x = \pm\infty$.

Q2. $f(t) = t \times \frac{\cos t}{\sin t} = \frac{t}{\tan t}$

$f(t) = t \times \frac{1}{t + \frac{t^3}{3} + o(t^4)} = \frac{1}{1 + \frac{t^2}{3} + o(t^3)} = \frac{1}{1+u}$

$= 1 - u + u^2 + o(u^2)$

$f(t) = 1 - \frac{t^2}{3} + o(t^3)$

Q3. $\boxed{\cotan t = \frac{1}{t} f(t) = \frac{1}{t} - \frac{t}{3} + o(t^2)}$

X18 Q1. $f(x) = \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^3} e^{-x} = e^{x^3 \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - x}$

Or $\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$

D'où $f(x) = e^{x - \frac{1}{2x} - x + o(1/x)} = e^{\frac{-1}{2x} + o(1/x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \boxed{1}$

Q2. $g(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2} = e^{\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}$

Or $\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)$

et $\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right) = -\frac{x^2}{6} + o(x^2)$

D'où $g(x) = e^{-\frac{1}{6} + o(1)} \xrightarrow[x\to 0]{} \boxed{e^{-1/6}}$

Q3. $h(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}$

Or $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

Donc $\frac{1}{\ln(1+x)} = \frac{1}{x} \times \frac{1}{1 - \frac{x}{2} + o(x)} = \frac{1}{x}\left(1 + \frac{x}{2} + o(x)\right)$

Ainsi $h(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2} + o(1) \xrightarrow[x\to 0]{} \boxed{-\frac{1}{2}}$

Q4. $k(x) = \left(\sqrt{x^2+2} - x + 1\right)^x$ ⚠ $x \to +\infty$.

On a : $\sqrt{x^2+2} = x\sqrt{1+\frac{2}{x^2}} = x\left(1 + \frac{1}{2}\frac{2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$

$= x + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$

D'où $k(x) = \left(1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)^x = e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)}$

Or $\ln\left(1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$

Ainsi $k(x) = e^{1+o(1)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \boxed{e}$

X19 Rappel : $\tan u \underset{0}{=} u + \frac{u^3}{3} + o(u^3)$

Ainsi :

$$\tan^2 x = x^2 + \frac{2x^4}{3} + o(x^4)$$

$$\tan 2x = 2x + \frac{8x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\tan^2 2x = 4x^2 + \frac{32}{3}x^4 + o(x^4)$$

$$\tan 3x = 3x + 9x^3 + o(x^3)$$

$$\tan^2 3x = 9x^2 + 54x^4 + o(x^4)$$

Alors $f(x) = \frac{1}{x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)} + \frac{1}{4x^2 + \frac{32}{3}x^4 + o(x^4)} - \frac{\lambda}{9x^2 + 54x^4 + o(x^4)}$

$$= \frac{1}{x^2}\left[\frac{1}{1+\frac{2}{3}x^2 + o(x^2)} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{1+\frac{8}{3}x^2 + o(x^2)} - \frac{\lambda}{9} \times \frac{1}{1+6x^2+o(x^4)}\right]$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(1 - \frac{2}{3}x^2 + o(x^2) + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{8}{3}x^2 + o(x^2)\right) - \frac{\lambda}{9}\left(1 - 6x^2 + o(x^2)\right)\right)$$

$$= \frac{1 + 1/4 - \lambda/9}{x^2} + \left(-\frac{2}{3} - \frac{2}{3} + \frac{2\lambda}{3}\right) + o(1)$$

Ainsi f admet 1 limite finie en 0 ssi : $1 + \frac{1}{4} - \frac{\lambda}{9} = 0$

ie ssi $\boxed{\lambda = 9 \times \frac{5}{4} = \frac{45}{4}}$

Et dans ce cas la limite vaut :

$$\ell = -\frac{4}{3} + \frac{2 \times 45}{3 \times 4} = -\frac{4}{3} + \frac{15}{2} = \boxed{\frac{37}{6}}$$

$\boxed{x > 0}$ $\quad f(x) = x^{1+\frac{1}{x}} = x \cdot x^{1/x} = x\, e^{\frac{\ln(x)}{x}}$

Q1. $\dfrac{f(x)}{x} = e^{\frac{\ln x}{x}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$ car $\dfrac{\ln x}{x} \xrightarrow[+\infty]{} 0$ (c.c)

Donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x$.

Q2. Rappel : $e^u = 1 + u + \dfrac{u^2}{2} + o(u^2)$

Donc ici ; avec $u = \dfrac{\ln x}{x}$

$$e^{\frac{\ln x}{x}} = 1 + \frac{\ln x}{x} + \frac{\ln^2 x}{2x^2} + o\left(\frac{\ln^2 x}{x^2}\right)$$

D'où $\boxed{f(x) = x + \ln x + \dfrac{1}{2}\dfrac{\ln^2 x}{x} + o\left(\dfrac{\ln^2 x}{x}\right)}$

Q3. NON : car :

$$f(x) - (ax+b) = -b + (1-a)x + \ln x + o(\ln x) \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$$

quelles que soit les valeurs de a et b.