X6

- $\frac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta}$ avec $\alpha-\beta<0$

  Donc $x^{\alpha-\beta} \xrightarrow[+\infty]{} 0$ donc $\boxed{x^\alpha \underset{+\infty}{=} o(x^\beta)}$

- $\frac{x^\beta}{x^\alpha} = x^{\beta-\alpha}$ avec $\beta-\alpha>0$

  Donc $x^{\alpha-\beta} \xrightarrow[0]{} 0$ donc $\boxed{x^\beta \underset{0}{=} o(x^\alpha)}$

Q2 . • $f(x) = \sum_{k=p}^{n} a_k x^k = x^p \sum_{k=p}^{n} a_k x^{k-p}$

Or $\forall k \in \{p+1, \dots, n\}$, $x^{k-p} \xrightarrow[0]{} 0$

Donc $\sum_{k=p}^{n} a_k x^{k-p} \xrightarrow[x\to 0]{} a_p$

Donc $\frac{f(x)}{a_p x^p} \xrightarrow[0]{} 1$ ie $\boxed{f(x) \underset{0}{\sim} a_p x^p}$

- $\hat{M}$ chose en $\pm\infty$ en mettant x^n en facteur

  On déduit $\boxed{f(x) \underset{\pm\infty}{\sim} a_n x^n}$

X7 Q1. Posons $f_n(x) = x^n(1+x) - 1$

On a : • f_n cont. sur $[0,+\infty[$.

• $f_n(0) = -1 < 0$

• $f_n(x) \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$

• f_n est $s^{tt} \nearrow$ sur $[0,+\infty[$ (produit)

Donc d'après TVI généralisé, $\boxed{\exists!\, x_n \in [0,+\infty[,\ f_n(x_n) = 0}$

Q2a. On a :
$$x_n^n(1+x_n) = 1$$
$$x_n^n = \frac{1}{1+x_n} \quad (x_n \neq -1 \text{ car } x_n \geq 0)$$
$$\boxed{n\ln(x_n) = -\ln(1+x_n)}$$

Q2b. Dans Q1, on pouvait remarquer que $f_n(1) = 2-1 = 1 > 0$, donc le TVI s'applique sur $[0,1]$ et $x_n \in]0,1[$.

Donc
$$1+x_n < 2$$
$$\ln(1+x_n) < \ln 2$$
$$-\ln(1+x_n) > -\ln 2$$
$$n\ln(x_n) > -\ln 2$$

Donc $\boxed{\ln x_n > -\frac{\ln 2}{n}}$

Q2c. En faisant tendre $n \to +\infty$, le th. des gendarmes donne : $\ln x_n \xrightarrow[+\infty]{} 0$

D'où $\boxed{x_n \xrightarrow[+\infty]{} 1}$

Q3a. $\dfrac{\ln x_n}{-\frac{\ln 2}{n}} = \dfrac{n\ln x_n}{-\ln 2} = \dfrac{\ln(1+x_n)}{\ln 2}$ (Q2a)

Or $x_n \to 1$ d'où $\dfrac{\ln x_n}{-\frac{\ln 2}{n}} \xrightarrow[+\infty]{} 1$

(ie) $\boxed{\ln x_n \sim -\frac{\ln 2}{n}}$

Q3b. On a : $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$

En posant $t = 1+x \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ on obtient :
$$\ln(t) \underset{1}{\sim} t-1$$

Or $x_n \to 1$, donc : $x_n - 1 \sim \ln(x_n)$

$$\boxed{x_n - 1 \sim -\frac{\ln 2}{n}}$$

XIb Q1a. $f \underset{a}{\sim} 0 \iff f(x) = 0 \times u(x)$ avec $u \to 1$

(ie) $\boxed{f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathcal{V}(a)}$

Q1b. $f(x) \underset{0}{\sim} x$ et $g(x) \sim -x$

$(f+g)(x) = \sin x - x \neq \quad x \in \mathcal{V}(0) \setminus \{0\}$

Or $x - x = 0$, donc on constate que l'on ne peut pas ajouter les équiv. car sinon on aurait $f+g \sim 0$ ce qui est faux.

Q1c. $u_n = 1 + \frac{1}{n} \qquad v_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$

On a $\frac{u_n}{v_n} = \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{(-1)^n}{n}} \to 1$

Donc $u_n \sim v_n$

Mais avec $w_n = -1$, on a : $u_n + w_n = +\frac{1}{n}$

et $v_n + w_n = \frac{(-1)^n}{n}$

et $u_n + w_n \not\sim v_n + w_n$.

Q2a. $e^{f(x)} \sim e^{g(x)} \iff \frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} \to 1$

$\iff (f-g)(x) \to 0$.

Q2b. $f(x) = x$ et $g(x) = x + 1$

On a bien $f(x) \underset{+\infty}{\sim} g(x)$ mais $f(x) - g(x) \not\to 0$

Donc $e^{f(x)} \not\sim e^{g(x)}$.

Q3. • On a $\sin x \underset{0}{\sim} x$

On pose $x = 2t \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$, d'où $\sin(2t) \underset{0}{\sim} 2t$

• $e^t - 1 \underset{0}{\sim} t$

On pose $t = \frac{1}{x^2} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$

D'où $\boxed{e^{\frac{1}{x^2}} - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}}$

XII $\bullet$ $f(x) = x^{(x^x)} - 1$

$= e^{x^x \ln x} = e^{e^{x\ln x} \ln x}$

$x \ln x \xrightarrow[0^+]{} 0$ (C.C)

$e^{x\ln x} \times \ln x \xrightarrow[0^+]{} -\infty$

Donc $\boxed{f(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0}$

$\bullet$ $g(x) = x^{(x^x - 1)}$

$= e^{(x^x - 1)\ln x} = e^{(e^{x\ln x} - 1)\ln x}$

Or $e^t - 1 \underset{0}{\sim} t$ et $x \ln x \xrightarrow[0]{} 0$

Donc $e^{x\ln x} - 1 \sim x \ln x$

Par produit $(e^{x\ln x} - 1)\ln x \sim x(\ln x)^2$

Or $x \ln^2 x \xrightarrow[0]{} 0$ (C.C)

Donc $\boxed{g(x) \xrightarrow[0^+]{} 1}$