Exo W21 :

$$P(X) = (X+1)^n - (X-1)^n$$

Q1. On développe P avec le binôme de Newton

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k X^{n-k}$$

$$= \underset{k=0}{X^n} + \underset{k=1}{nX^{n-1}} + \underset{\deg \leq n-2}{Q_1(X)} - \left(\underset{k=0}{X^n} - \underset{k=1}{nX^{n-1}} + \underset{\deg \leq n-2}{Q_2(X)} \right)$$

$$= 2n X^{n-1} + \underbrace{Q_1(X) - Q_2(X)}_{\deg \leq n-2}$$

D'où $\boxed{P \text{ est de degré } n-1 \text{ et son coef dominant est } 2n}$

Q2. $P(X) = 0 \iff (X+1)^n = (X-1)^n$

$\iff \left(\frac{X+1}{X-1}\right)^n = 1$ ($X \neq 1$, car 1 n'est pas une racine)

$\iff \exists k \in \{0, \dots, n-1\} / \frac{X+1}{X-1} = \omega_k$ (racines n-ième de l'unité)

$\iff X+1 = \omega_k (X-1)$

$\iff X(1-\omega_k) = -(\omega_k+1)$ $k = \{0, \dots, n-1\}$ (R) $k=0$ donne $\omega_0 = 1$, pas possible.

$\iff X = \frac{\omega_k+1}{\omega_k-1}$ avec $k = \{1, \dots, n-1\}$, $\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$

$$X = \frac{e^{i\frac{2k\pi}{n}}+1}{e^{i\frac{2k\pi}{n}}-1} = \frac{e^{i\frac{k\pi}{n}}\left(e^{i\frac{k\pi}{n}} + e^{-i\frac{k\pi}{n}}\right)}{e^{i\frac{k\pi}{n}}\left(e^{i\frac{k\pi}{n}} - e^{-i\frac{k\pi}{n}}\right)} = \frac{2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} =$$

$$\boxed{X = -i \times \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)} \qquad k = \{1, \dots, n\}}$$