Planche V
Dérivabilité

□ Exercice V1

Montrons que la fonction sinus est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$, et que $\sin'(x_0) = \cos(x_0)$:

Q 1 À l'aide du cercle trigonométrique et de raisonnements sur des aires, démonter que pour tout $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ on a :

$$\sin x \cos x \leqslant x \leqslant \tan x$$

Q 2 En déduire que pour tout $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ on a $\cos x \leqslant \dfrac{\sin x}{x} \leqslant \dfrac{1}{\cos(x)}$

Q 3 Conclure sur la limite de $\dfrac{\sin x}{x}$ en 0^+ puis 0^-.

Q 4 On rappelle la formule trigonométrique : $\sin p - \sin q = 2\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)$.
Montrer que sin est dérivable en tout $x_0 \in \mathbb{R}$ et donner $\sin'(x_0)$

Remarque : quand on démontre que la limite de $\frac{\sin x}{x}$ vaut 1 en 0 à l'aide du taux d'accroissement, c'est un peu une arnaque, car en realité on s'en sert pour démontrer que la fonction sinus est dérivable !!

□ Exercice V2

Pour tout paramètre m, on définit $f_m : x \longmapsto \dfrac{x+m}{x^2+1}$ dont la courbe représentative est notée $\mathcal{C}_m$

Q 1 Montrer que toutes les tangentes au point d'abscisse $x = 0$ aux courbes $\mathcal{C}_m$ sont parallèles.

Q 2 Montrer que toutes les tangentes au point d'abscisse $x = 1$ aux courbes $\mathcal{C}_m$ sont concourantes.

□ Exercice V3

Soit f une fonction dérivable en 0. Montrer que $\dfrac{f(x) - f(-x)}{2x}$ admet une limite finie en 0.
Que dire de la réciproque de cette implication ?

□ Exercice V4

Calculer les domaines de définition-continuité-dérivabilité puis la dérivée des fonctions suivantes :

1. $x \longmapsto \ln(1 + \sqrt{x})$
2. $x \longmapsto \sqrt{x^3 + 1}$
3. $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{\ln x}}$
4. $x \longmapsto \sin(\cos(\sin x))$
5. $x \longmapsto \left(x^2+1\right)^2\left(x^3-1\right)^2$
6. $x \longmapsto \sqrt[3]{\arcsin x}$
7. $x \longmapsto (x+2)\mathrm{e}^{1/x}$
8. $x \longmapsto x^{\ln(x)}$
9. $x \longmapsto x^{(x^x)}$

□ Exercice V5

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, et paire (resp. impaire, resp. T-périodique).
Que peut-on dire de f'?

□ Exercice V6 (Étudier la continuité et la dérivabilité d'une fonction)

Q 1 On définit $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x}{1+\mathrm{e}^{1/x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. Étudier la continuité et la dérivabilité de f.

Q 2 Étudier la continuité, la dérivabilité et les variations de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|}$.

□ Exercice V7 (Prolonger une fonction et étudier la dérivabilité ponctuelle)

On définit la fonction f par $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{\ln|x|}}$.

Q 1 Déterminer l'ensemble de définition de f ainsi que sa parité. Puis utiliser un outil numérique pour avoir un aperçu de sa représentation graphique.

Q 2 **a.** Prolonger f par continuité en 0.

b. (plus dur) Étudier la dérivabilité en 0 du prolongement.

Q 3 On prolonge f en 1 par $f(1) = 0$. Étudier alors la dérivabilité de f à dte et à gche de 1.

□ Exercice V8

Dans chaque question, calculer les dérivées successives :

Q 1 Soit $f : x \mapsto \ln(x)$. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_*^+$, $(\ln)^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$

Q 2 $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$

Q 3 $f : x \mapsto \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$ *(Leibniz)*

Q 4 $f : x \mapsto \dfrac{1-x}{1+x}$

□ Exercice V9 (Classe $\mathcal{C}^n$)

Q 1 Justifier que $f : x \longmapsto x^{3/2}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0;+\infty[$, mais que sur $[0;+\infty[$ elle est $\mathcal{C}^1$ et pas $\mathcal{C}^2$.

Q 2 Soit $g : x \longmapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. Montrer que g est dérivable mais non $\mathcal{C}^1$ sur $[0;+\infty[$.

Q 3 Pour $p \in \mathbb{N}$, $h : x \longmapsto x^p$. Calculer $h^{(n)}(x)$.

□ Exercice V10

On définit $f :\ x \mapsto \begin{cases} \frac{x}{1+\mathrm{e}^{1/x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. Sur quel ensemble f est-elle de classe C^∞ ? Justifier.

□ Exercice V11

Soit $f :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R} :\ x \mapsto \mathrm{e}^{-1/x^2}$ si $x \neq 0$ et 0 sinon.

Q 1 Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Q 2 Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que :

$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f^{(n)} : x \mapsto \dfrac{P_n(x)\ \mathrm{e}^{-1/x^2}}{x^{3n}}$.

Q 3 En déduire que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ si on la prolonge avec $f^{(n)}(0) = 0$.

□ Exercice V12 (Bijectivité)

Montrer que $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sin x}$ réalise une bijection de $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ dans un intervalle à préciser. Sur quel intervalle J sa réciproque est-elle dérivable? Calculer alors la dérivée de f^{-1} sur J.

□ Exercice V13 (Extremum)

Soit $f :\ [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable et vérifiant $f'(a) > 0$ et $f'(b) < 0$. Montrer que la dérivée de f s'annule.
(On pourra justifier que f atteint son maximum en $c \in]a,b[$...)

☐ Exercice V14 (Rolle)

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Montrer qu'il existe un réel $x \in]0, 1[$ tel que $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$.

☐ Exercice V15 (Rolle)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et a_1, a_2, ...a_n des réels tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = 0$. Montrer que l'équation $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} = 0$ admet au moins une solution dans $]0; 1[$.

☐ Exercice V16 (Rolle)

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $n \geqslant 2$ un entier. On suppose que f s'annule au moins n fois. Démontrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet au moins $n - 1$ solutions réelles, distinctes.

☐ Exercice V17

Soit f continue sur $\mathbb{R}^+$, dérivable sur $\mathbb{R}^+_*$ telle que $f(0) = 0$ et $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
Démontrer qu'il existe $c \in]0; +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

☐ Exercice V18 (TAF)

Majorer l'erreur commise en faisant l'approximation de $\sqrt{10001}$ par 100.

☐ Exercice V19 (TAF)

Soit f dérivable sur $\mathbb{R}^+$ telle que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f'(x) = \ell > 0$. Montrer que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

☐ Exercice V20 (TAF)

Montrer que $\ln(1 + x) - x + \dfrac{x^2}{2} = x^2 \varepsilon(x)$, avec $\varepsilon(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$.

☐ Exercice V21 (IAF)

Démontrer avec l'IAF que $|\sin x| \leqslant |x|$ et que $\ln(1 + x) \leqslant x$

☐ Exercice V22 (IAF)

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant : $\forall (x, y) \in I^2,\ |f(y) - f(x)| \leqslant k\, |y - x|^{\alpha}$, où $k > 0$ et $\alpha > 1$.
Montrer que f est constante sur I (intervalle de $\mathbb{R}$)

□ Exercice V23 (IAF et suites, du classique...)

On note f la fonction définie sur $[1;e]$ par $f(x) = \dfrac{2x}{\ln(x)+1}$ et g la fonction définie sur $[0;1]$ par $g(t) = \dfrac{2t}{(1+t)^2}$.

Q 1 En étudiant les variations de g, démontrer que pour tout $t \in [0;1]$, on a $0 \leqslant g(t) \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Q 2 En étudiant les variations de f démontrer que l'intervalle $[1;e]$ est stable par f.

Q 3 En remarquant (ou admettant) que pour tout $x \in [1;e]$ on a $f'(x) = g(\ln(x))$, justifier que pour tout $x \in [1;e]$, on a $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Q 4 En déduire que pour tout $(x,y) \in ([1;e])^2$, on a $|f(x) - f(y)| \leqslant \dfrac{1}{2}|x-y|$.

Q 5 On définit une suite (u_n) par $u_0 = 1$ et pour tout n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Utiliser ce qui précède pour démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_n - e| \leqslant \dfrac{e-1}{2^n}$.

Q 6 Déterminer la limite de la suite (u_n) ?

Q 7 (Facultatif) À partir de quel rang est-on sûr que u_n est à moins de 10^{-3} de e ?

□ Exercice V24 (IAF et TAF)

Après avoir constaté graphiquement, justifier les résultats suivants :

Q 1 Montrer que $f : x \in [-1,1] \longmapsto \arcsin(1-x^4)$ est dérivable en 0.

Q 2 Montrer que $g : x \in [-1,1] \longmapsto \arcsin(1-x^2)$ n'est pas dérivable en 0.