

CHAPITRE



TSI¹

Lycée Artaud

2025/2026

Dérivabilité

Sommaire

I	Dérivabilité en un point	2
I.1	Taux d'accroissement et dérivées	2
I.2	Interprétations du nombre dérivé	3
I.2.1	Interprétation graphique du nombre dérivé	3
I.2.2	Interprétation cinématique du nombre dérivé	3
I.3	Caractérisation à l'aide d'un développement limité d'ordre 1	4
II	Dérivée sur un ensemble de réels	4
II.1	Définition	4
II.2	Dérivées d'ordre supérieur	5
II.3	Bijections et dérivation	6
III	Théorèmes fondamentaux	6
III.1	Dérivée et extremums	6
III.2	Le théorème de Rolle	8
III.3	Théorème des accroissements finis (TAF)	8
III.4	Inégalité des accroissements finis (IAF)	9

REMARQUES –

- Cette propriété peut être utilisée pour montrer qu'une fonction n'est pas dérivable en un point. Pour cela, on peut par exemple montrer qu'il n'y a pas dérivabilité à gauche (ou à droite) au point considéré ou encore qu'il y a dérivabilité à gauche et à droite au point considéré mais avec des nombres dérivés à gauche et à droite différents.
- Cette propriété peut aussi être utilisée pour montrer qu'il y a dérivabilité en un point lorsque la fonction est définie de façon différente selon que l'on est à gauche ou à droite du point considéré.

I.2 Interprétations du nombre dérivé

I.2.1 Interprétation graphique du nombre dérivé



Propriété I.2.1

Soit (\mathcal{C}_f) la courbe représentative de f dans un repère cartésien et $M_0(a, f(a))$ un point de la courbe.

- Pour $x \in I$ avec $x \neq a$, $\mathcal{T}_a(x)$ représente la pente de la sécante joignant les points $M_0(a, f(a))$ et $M(x, f(x))$.
- Si f est dérivable en a alors (\mathcal{C}_f) admet en M_0 une tangente (T_0) d'équation

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

- Si la fonction $x \mapsto \mathcal{T}_a$ admet une limite infinie en a (respectivement à droite en a , à gauche en a) alors (\mathcal{C}_f) admet une tangente (respectivement une demi-tangente) en M_0 parallèle à l'axe des ordonnées.

I.2.2 Interprétation cinématique du nombre dérivé

Propriété I.2.2

Supposons ici que $f(t)$ représente la position à l'instant t d'un mobile sur un axe.

- Pour $t \in I$ avec $t \neq t_0$, le taux d'accroissement de f entre t_0 et t représente la vitesse moyenne du mobile sur l'intervalle de temps (t_0, t) .
- Si f est dérivable en t_0 alors $f'(t_0)$ représente la vitesse instantanée du mobile à l'instant t_0 .

EXEMPLE – Quels sont les ensembles de définition et de dérivabilité de la fonction $f : x \rightarrow \frac{1}{1+|x|}$?

S4

MÉTHODE – En pratique pour démontrer qu'une fonction f est dérivable sur un ensemble I :

- En principe on utilise le fait que f est obtenue par opérations usuelles sur des fonctions de références dérivables.
- S'il reste un ou plusieurs points qui posent problème, on étudie en ces points la limite du taux d'accroissement.

Exercice V.4

Exercice V.5

Exercice V.6

Exercice V.7

II.2 Dérivées d'ordre supérieur

♪ Définition II.2.1

On considère une fonction f dérivable sur un intervalle I .

- **Dérivée n-ième** : sous réserve d'existence on définit par récurrence la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f par :

$$f^{(0)} = f \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$$

- **Fonctions de classe \mathcal{C}^n** : On dit qu'une fonction est de classe \mathcal{C}^n sur I lorsqu'elle est n fois dérivable sur I et lorsque $f^{(n)}$ est continue sur I .
- Lorsque f est de classe \mathcal{C}^n pour tout $n \in \mathbb{N}$, on dit qu'elle est de classe \mathcal{C}^∞ .

EXEMPLE – Vérifions que la fonction f définie sur \mathbb{R} par :
$$\begin{cases} f(x) = x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = -x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , mais pas \mathcal{C}^2 .

S5

Preuve

Donnons juste l'idée :

S7

□

☺ **Théorème III.1.2 (réciproque)**Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a, b]$ et $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$. Alors :

- si f' change de signe de part et d'autre de c , f admet en $x = c$ un extremum local.
- si f' garde un signe constant au voisinage de c , f admet en $x = c$ une inflexion.

EXEMPLE –

- Faire deux dessin avec $x \mapsto x^\alpha$ pour illustrer le théorème :

S8

- Donner des exemples de fonction sur $[0; 1]$ qui ont des extremums et dont la dérivée ne s'annule pas.

S9

□ ✎ **Exercice V.13**

III.2 Le théorème de Rolle

☺ **Théorème III.2.1 (Théorème de Rolle)**

Soit f une fonction définie sur $[a, b]$, continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. On suppose de plus que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Preuve

S10

□

Interprétation du théorème de Rolle

- Graphiquement, ce théorème signifie que la courbe représentative d'une fonction dérivable qui passe par deux points de même ordonnée possède au moins une tangente horizontale entre ces deux points.
- Du point de vue cinématique, un mobile qui se déplace sur un axe et qui passe deux fois par le même point voit nécessairement sa vitesse instantanée s'annuler au moins une fois entre ces deux points.

EXEMPLE – soit P un polynôme réel admettant 3 racines réelles. Montrer que son polynôme dérivé admet deux racines réelles :

S11

☞ Exercice V.14

☞ Exercice V.15

☞ Exercice V.16

☞ Exercice V.17

III.3 Théorème des accroissements finis (TAF)

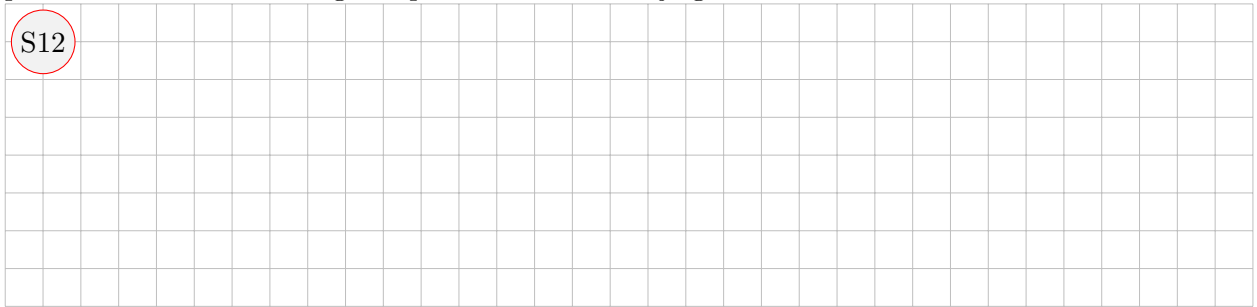
☺ **Théorème III.3.1 (égalité des accroissements finis)**

Soit f une fonction définie sur $[a, b]$, continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Interprétations du TAF

- Graphiquement, ce théorème signifie que tout arc de la courbe représentative d'une fonction dérivable possède au moins une tangente parallèle à la corde joignant les deux extrémités de cet arc.

S12



- Du point de vue cinématique, un mobile qui se déplace sur un axe pendant un certain laps de temps possède au moins une fois une vitesse instantanée égale à sa vitesse moyenne sur ce laps de temps.

Preuve du TAF

S13


 Exercice V.18

 Exercice V.19

 Exercice V.20

III.4 Inégalité des accroissements finis (IAF)

 Théorème III.4.1 (Inégalité des AF)

Soit f une fonction définie et continue sur $[a; b]$, dérivable sur $]a; b[$ et à dérivée bornée sur $]a; b[$.
Alors :

- $(b - a) \inf_{x \in [a, b]} f'(x) \leq f(b) - f(a) \leq (b - a) \sup_{x \in [a, b]} f'(x)$.
- $|f(b) - f(a)| \leq \sup_{x \in [a, b]} |f'(x)| |b - a|$

REMARQUES – Ce théorème est vrai en particulier si f est \mathcal{C}^1 sur $[a; b]$. Pourquoi ?

S14

