Introduction aux équations différentielles d'ordre 2 pour la physique/chimie

On a déjà vu une introduction aux équation différentielles pour la physique/chimie. Ces équations avaient la particularité de faire intervenir la dérivée de la fonction inconnue que l'on cherche. Cette fois-ci, il y aura aussi la dérivée seconde de la fonction inconnue...

1 Équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

Ici aussi, on ne s'occupera que de cas particuliers qui seront utiles en physique/chimie. On en dira davantage dans le chapitre de mathématiques qui arrive bientôt. L'objectif est de déterminer toutes les fonctions y deux fois dérivables qui vérifient l'équation suivante (a et b sont des constantes réelles, et c une fonction fixée) :

$$\boxed{(E) \quad \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}(t) + a\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) + by(t) = c(t)} \quad \text{ou encore} \quad \boxed{(E) \quad y'' + ay' + by = c(t)} \qquad \text{avec } a \text{ et } b \text{ des constantes}$$

On peut remarquer là aussi que l'on omet souvent la variable t pour alléger les notations, mais il faut bien garder à l'esprit que y est une fonction de la variable t.

1.1 Équation homogène : propriété

Comme on l'a déjà fait pour le premier ordre, on commence par étudier **l'équation homogène** associée à (E) :

$$\boxed{(E_0) \quad y'' + ay' + by = 0}$$

Propriété 1 : solutions de l'équation homogène

On associe à l'équation homogène :

$$\boxed{(E_0) : \ y'' + ay' + by = 0}$$

son équation caractéristique :

$$(E_c) : \ r^2 + ar + b = 0$$

En notant Δ son discriminant, on distingue alors trois cas :

(i) Si $\Delta \neq 0$, l'équation caractéristique (E_c) admet deux racines (réelles ou complexes) distinctes r_1 et r_2. Les solutions de (E_0) sont les fonctions de la forme :

$$\boxed{y_h(t) = \lambda \mathrm{e}^{r_1 t} + \mu \mathrm{e}^{r_2 t}} \quad \text{avec } \lambda \text{ et } \mu \text{ des nombres fixés}$$

(ii) Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique (E_c) possède une racine double r_0. Les solutions de (E_0) sont les fonctions de la forme :

$$\boxed{y_h(t) = (\lambda + \mu t)\mathrm{e}^{r_0 t}} \quad \text{avec } \lambda \text{ et } \mu \text{ des nombres fixés.}$$

(iii) Si $\Delta < 0$ et que les coefficients a et b sont réels on préfère obtenir des solutions réelles. On note $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ les deux racines complexes conjuguées de (E_c). Les solutions de (E_0) sont alors les fonctions :

$$\boxed{y_h(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}(\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t))} \quad \text{avec } \lambda \text{ et } \mu \text{ des nombres fixés.}$$

1.2 Équation homogène : démonstration

On va découper la preuve complète de cette propriété en plusieurs étapes.

- Étape 1 : on remarque qu'il existe des solutions sous la forme $\varphi(t) = \mathrm{e}^{rt}$, et que pour être solution de (E_0) il faut et il suffit que r soit racine de l'équation caractéristique (E_c) ;
- Étape 2 : on cherche ensuite toutes les solutions f, en écrivant que f peut s'écrire sous la forme $f(t) = g(t)\mathrm{e}^{r_1 t}$ (avec r_1 une racine de (E_c)). On montre que f est solution de (E_0) si et seulement si g' est solution d'une équation différentielle d'ordre 1 ;
- Étape 3 : pour trouver g, on résout cette équation différentielle d'ordre 1 en distinguant les cas $\Delta \neq 0$ et $\Delta = 0$, ce qui permettra d'obtenir les points (i) et (ii) de la propriété 1 ;
- Étape 4 : dans le cas particulier où $\Delta < 0$, on utilise les formules d'Euler pour obtenir le point (iii) de la propriété 1.

Étape 1 : on commence par vérifier qu'une fonction φ de la forme $\varphi(t) = \mathrm{e}^{rt}$ est solution de (E_0) si et seulement si r est racine de l'équation caractéristique (E_c) :

$$(E_c) : \; r^2 + ar + b = 0.$$

S1

Notons r_1 et r_2 les racines de (E_c) (éventuellement complexes et/ou confondues), on a :

$$r_1 = \frac{-a+\delta}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-a-\delta}{2}$$

avec δ une racine carrée du discriminant Δ de (E_c).

Étape 2 : ensuite, comme on l'a fait pour les équations différentielles d'ordre 1, on va chercher les solutions f sous la forme

$$f(t) = g(t)\mathrm{e}^{r_1 t}$$

Cela n'impose aucune restriction puisque toute fonction peut s'écrire de la sorte. On montre alors que f est solution de (E_0) si et seulement si g' est solution de

$$(E') \quad y' + \delta y = 0$$

S2

Étape 3 : on résout l'équation (E') précédente pour trouver g', puis g et déduire f.
D'après ce que l'on a vu pour le premier ordre, il faut distinguer deux cas, selon que δ est nul ou non :

(i) Si $\delta \neq 0$ (c'est-à-dire si $\Delta \neq 0$) :

S3

(ii) Si $\delta = 0$ (c'est-à-dire si $\Delta = 0$) :

S4

Étape 4 : il reste à traiter le point (iii) de la propriété 1, c'est-à-dire le cas où $\Delta < 0$.
On note $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ les deux racines complexes conjuguées de (E_c). D'après le point (i), les solutions de (E_0) sont les fonctions de la forme :

$$y_h(t) = \lambda \mathrm{e}^{(\alpha+i\beta)t} + \mu \mathrm{e}^{(\alpha-i\beta)t} \quad \text{avec } \lambda \text{ et } \mu \text{ des nombres fixés.}$$

Montrons que les fonctions énoncées dans le point (iii) de la propriété 1 sont bien des solutions de (E_0) et que se sont les seules (implication et réciproque).

- **(Implication)**

S5

- **(Réciproque)**

S6

1.3 Équation homogène : exemples

Cherchons les solutions réelles de : $y'' - y' - 2y = 0$

S7

Cherchons les solutions réelles de : $y'' + 2y' + 2y = 0$

S8

Cherchons les solutions réelles de : $y'' + \omega^2 y = 0$

S9

1.4 Solutions générales

Propriété 2 : solutions de l'équation générale

$$(E) : \; y''(t) + ay'(t) + by(t) = c(t)$$

Notons y_p une solution déjà connue de l'équation (E) (on parle de **solution particulière**). Alors l'ensemble des solutions de cette équation (E) est formé par les fonctions de la forme

$$\boxed{y = y_p + y_h}$$

où y_h est une solution (quelconque) de l'équation homogène associée à (E).

Preuve : c'est exactement la même que pour l'ordre 1 !
Notons y_p une solution particulière de (E), c'est à dire que l'on a :

$$y_p''(t) + ay_p'(t) + by(t) = c(t)$$

Alors y est solution de (E) si et seulement si :

$$y''(t)+ay'(t)+by(t) = c(t) \iff y''(t)+ay'(t)+by(t) = y_p''(t)+ay_p'(t)+by(t) \iff (y-y_p)''+a(y-y_p)'+b(y-y_p) = 0$$

Ainsi y est solution de (E) si et seulement si la fonction $y-y_p$ est solution de l'équation homogène associée (E_0). On en déduit donc que l'ensemble des solutions de (E) est formé par les fonctions de la forme :

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t)$$

Application : déterminer les solutions de l'équation : $y'' - y' - 2y = 2$

S10

1.5 Unicité des solutions ? Le problème de Cauchy

Propriété 3 : problème de Cauchy

Si on fixe des *conditions initiales*, alors il y a existence et unicité de la solution. Plus précisément :
Si t_0, y_0 et y_0' sont fixés, alors il existe une et une seule solution au système :

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = c(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_0' \end{cases}$$

On nomme ce système « problème de Cauchy »

Application : déterminer la solution f de (E) : $y'' - 5y' + 6y = 4t$ qui vérifie $f(0) = 2$ et $f'(0) = 1$.

S11

2 Utilisation en physique : exercices

Voir les exercices de la planche de physique...