(R5) $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ croissante.

$A = \{ x \in [a,b],\ f(x) \leq x \}$.

<u>Q1</u> $A \neq \emptyset$ car $b \in A$ $\quad (f(b) \in [a,b])$

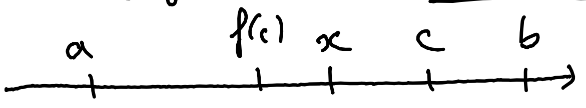
<u>Q2</u>. a est minorant pour A et b majorant.

A est non vide borné par a et b donc

$c = \inf A \in [a,b]$.

<u>Q3. a.</u> <u>Supposons par l'absurde que $f(c) < c$.</u>

Prenons $x \in \,]f(c), c[$: $\quad \underline{\underline{a \leq f(c) < x < c \leq b}}$



On a : • $a \leq x < c \leq b$, donc $f(x) \leq f(c)$ (car $f \nearrow$)

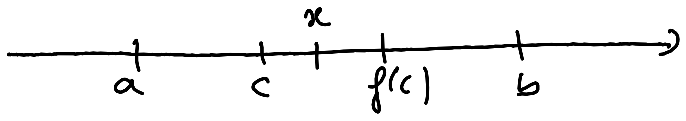
• or $f(c) \leq x$, donc $f(x) \leq x$, dc $x \in A$

• mais $x < c$ (et c minorant), <u>impossible</u>.

donc $\boxed{f(c) \geq c}$

<u>Q3b</u> . <u>Supposons par l'absurde que $f(c) > c$</u>

On a : $a \leq c < f(c) \leq b$



Puisque c est le + gd des minorants de A,
$f(c)$ n'est pas minorant de A, donc on peut
trouver $\underline{\underline{x \in \,]c, f(c)[\cap A}}$.

On a alors $f(c) \leq f(x)$ $\quad$ (car $f \nearrow$)

et $f(x) \leq x$ $\quad$ (car $x \in A$)

d'où $\underline{\underline{f(c) \leq x}}$, contradiction !

donc $\boxed{f(c) \leq c}$

<u>Conclusion :</u> $\boxed{f(c) = c}$

<u>Q4</u>. On vient de voir qu'il existe $c \in [a,b]$
tq $f(c) = c$, (ie) c est un point
fixe pour f.

R7) On rappelle qu'un intervalle I de $\mathbb{R}$ est de la forme :

$\emptyset$, $[a,b]$, $[a,b[$, $[a,+\infty[$, $]-\infty;b]$

$\mathbb{R}$, $]a,b[$, $]a,b]$, $]a,+\infty[$, $]-\infty,b[$

avec a et b réels.

Montrons que : I intervalle $\Leftrightarrow \forall (x,y)\in I^2, [x,y]\subset I$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Chacun des cas est "trivial", par exple, si $I=[a,b[$, et $a\leq x<y<b$ alors $[x,y]\subset [a,b[$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Notons $a=\begin{cases}\inf I & \text{si } I \text{ minoré}\\ -\infty & \text{sinon}\end{cases}$

$$b=\begin{cases}\sup I & \text{si } I \text{ borné}\\ +\infty & \text{sinon.}\end{cases}$$

* Traitons le cas I borné :

• On a bien sûr $I\subset [a,b]$ (a et b bornes sup et inf)

• Montrons que $]a,b[\subset I$: soit $x\in]a,b[$.

Par déf de sup et inf, il existe x_1 et x_2 ds I tq $a\leq x_1<x<x_2\leq b$. On $[x_1,x_2]\subset I$, donc $x\in I$.

• Voyons les bords :

→ Si a et $b\in I$ alors $[a,b]=I$

→ Si $a\in I$, $b\notin I$ alors $[a,b[=I$ ....

* Reste à voir I non borné ....