Planche Q
Systèmes linéaires

□ Exercice Q1 (Résolution « naïve » de systèmes)

Trouver les solutions éventuelles des systèmes :

$$(S_1)\begin{cases}3x-6y=1\\-2x+4y=3\end{cases}\qquad (S_2)\begin{cases}2x-3y=1\\3x+2y=2\end{cases}\qquad (S_3)\begin{cases}3x+y=1\\2x-5y=3\\-x+11y=-5\end{cases}\qquad (S_4)\begin{cases}x+3y-z=0\\3x+2z=1\\-2x+y-z=0\end{cases}$$

□ Exercice Q2 (produit matriciel)

Calculer les produits matriciels $A\times B$ quand cela est possible :

Q 1 $A=\begin{pmatrix}3&2&-1\\-2&0&1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$

Q 2 $A=\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&0&1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$

Q 3 $A=\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&0&1\\-1&2&0\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$

Q 4 $A=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$

□ Exercice Q3 (Matrices Échelonnées Réduites par Lignes)

Par des opérations élémentaires sur les lignes, trouver dans chaque cas la matrice échelonnée réduite par ligne (ERL) des matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\\15&-12\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0&-2&2&4\\0&-4&4&8\\0&1&-1&-2\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}0&0&1&-1\\0{,}5&1&0{,}5&1\\-1&-2&1&1\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}2&1&-2&1\\-1&3&-1&1\\3&-1&1&3\\1&2&-3&0\end{pmatrix}$$

□ Exercice Q4 (Résoudre un système non carré)

Résoudre les systèmes en utilisant (ou pas) la méthode de Gauss:

$$(S_1)\begin{cases}x+y+2z+3t=1\\x+y+z-t=2\end{cases}\quad,\quad (S_2)\begin{cases}x+4y+3z+t=1\\2x+5y+4z-t=4\\x-3y-2z+3t=5\end{cases}\quad \text{et}\quad (S_3)\begin{cases}x+y-z=1\\-x+y+z=1\\3x-2y+z=-4\\2x+4y+3z=2\end{cases}$$

□ Exercice Q5 (Algorithme de Gauss)

Faire fonctionner l'algorithme de Gauss vu en cours sur les matrices :

$$A=\begin{pmatrix}3&6&-3\\4&1&0\\2&2&5\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}2&0&-1\\10&2&0\\3&2&-3\end{pmatrix}$$

□ Exercice Q6 (Avec des paramètres)

Résoudre, suivant les valeurs de $(\lambda,a,b,c)\in\mathbb{R}^3$:

$$(\mathcal{S}_1)\begin{cases}\lambda x+y=\lambda+1\\x+\lambda y=2\end{cases}\qquad (\mathcal{S}_2)\begin{cases}x+2y-z=a\\-2x-3y+3z=b\\x+y-2z=c\end{cases}$$

☐ Exercice Q7 (Geométrie dans l'espace)

Soit m réel fixé, et soient les deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$:

$$E_1 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{cases} x = m(1+t) \\ y = 1 + m^2 t \quad , t \in \mathbb{R} \\ z = 1 - t \end{cases} \right\}$$

$$E_2 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{cases} x = t + m^2 t' \\ y = m(t+t') \quad , (t,t') \in \mathbb{R}^2 \\ z = mt - m^3 t' \end{cases} \right\}$$

Q 1 Déterminer, suivant m, le *nombre de triplets* contenus dans $E_1 \cap E_2$.

Q 2 Reconnaître les ensembles E_1 et E_2 puis interpréter les résultats géométriquement.

☐ Exercice Q8 (Rang etc...)

On donne les matrices augmentées $(A_i \mid B_i)$ associées à des systèmes (S_i). Déterminer le rang, les inconnues principales et secondaires, et son éventuelle compatibilité.

Q 1 $(A_1 \mid B_1) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$

Q 2 $(A_2 \mid B_2) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & 4 \\ 5 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right)$

Q 3 $(A_3 \mid B_3) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$

Q 4 $(A_4 \mid B_4) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right)$

☐ Exercice Q9 (Calculer le rang d'une matrice à paramètres)

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer, suivant les scalaires a et b, le rang des matrices suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \\ a & a \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \qquad K = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ b & a & 0 \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$$

☐ Exercice Q10 (Familles de vecteurs)

Q 1 Soit le vecteur $u = (-2;1;-4;7) \in \mathbb{R}^4$. A-t-on $u \in Vect((2;2;1;2),(1;0;1;1),(1;1;1;2))$?

Q 2 On considère le sous-ensemble F de $\mathbb{R}^3$ défini par: $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, 2x - y + z = 0\}$

a. Le vecteur $v = (-1;-1;1)$ appartient-il à F ?

b. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que : $v(-1;-1;1) = a\,v_1 + b\,v_2$ avec $v_1 = (1;2;0)$ et $v_2 = (0;1;1)$, et déterminer a et b.

☐ Exercice Q11 (Familles de vecteurs)

Soient $v_1 = (1,2,3,4)$ et $v_2 = (1,-2,3,-4)$.

Q 1 Peut-on déterminer deux réels x et y tels que $(x,1,y,1) \in Vect\,(v_1, v_2)$?

Q 2 Peut-on déterminer deux réels x et y tels que $(x,1,1,y) \in Vect\,(v_1, v_2)$?

□ Exercice Q12 (Familles libres/liées)

Q 1 Dans $\mathbb{R}^4$, que peut-on dire d'une famille de 5 vecteurs ?

Q 2 Dans $\mathbb{R}^4$ on considère les vecteurs $u = (-3; 1; 0; 2)$, $v = (1; 1; 0; 0)$, $w = (1; 1; 1; 1)$. La famille (u, v, w) est-elle libre ou liée ?

Q 3 Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $u_1 = (1; 1; 1; 1)$, $u_2 = (2; 0; 2; 0)$, $u_3 = (-1; -1; 0; 0)$ et $u_4 = (0; 0; 1; 1)$. Déterminer si la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est libre ou liée.

□ Exercice Q13 (Familles génératrices)

Soit la famille $\mathcal{F}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ où $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ avec

$$u_1 = (2, -2, 3), u_2 = (-1, -1, 2) \text{ et } u_3 = (3, -1, 2) \text{ et } u_4 = (-2, -2, 3).$$

Q 1 La famille $\{u_1, u_2\}$ est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$?

Q 2 La famille $\mathcal{F}$ peut-elle être libre ?

Q 3 Démontrer que $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Q 4 Soit $u = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$. Justifier que u peut s'écrire comme combinaison linéaire de u_1, u_2, u_3 et u_4 puis déterminer quatre réels tels que : $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4$

□ Exercice Q14 (Important : passage implicite vers explicite)

On désigne par F le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ défini par:

$$F = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\right\}$$

(On définit ici F de façon implicite, c'est à dire avec une équation cartésienne)
Déterminer trois vecteurs u_1, u_2 et u_3 tels que $F = Vect\,(u_1, u_2, u_3)$
(On demande donc de trouver une expression explicite de F, c'est à dire une représentation paramétrique).
Indic : les éléments de F sont les solutions d'un "système" à une équation et 4 inconnues. On cherche à écrire les solutions sous forme explicite...
Pour voir si on a bien compris : déterminer les formes explicites des espaces suivants :

Q 1 $F_1 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases} \right\}$

Q 2 $F_2 = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^3 \ / \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases} \right\}$

□ Exercice Q15 (Important : passage explicite vers implicite)

Soient $v_1 = (1, 2, 3, 4)$ et $v_2 = (1, -2, 3, -4)$ et $F = Vect(v_1, v_2)$ (forme explicite).
Donner un système d'équations cartésiennes (forme implicite) de F.
Indic : donner les conditions pour que le système d'inconnues a et b : $(x, y, z, t) = av_1 + bv_2$ soit compatible...

Q 1 Pour voir si on a bien compris : déterminer une expression implicite de $Vect(v_1, v_2, v_3)$ avec $v_1 = (1, 2, 1, 2)$, $v_2 = (1, -2, 1, -2)$ et $v_3 = (1, 0, 1, 0)$.

□ Exercice Q16 (chapitre bijectivité)

Q 1 Montrer que $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (x + y, y - x, 2x + y) \end{array}$ est injective.

Q 2 Montrer que $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (2x + y - z, 3x + 2y + 5z) \end{array}$ est surjective.

Algorithme de Gauss-Jordan

Pour résoudre un système linéaire, on a vu en cours que l'on pouvait y associer une matrice A et qu'il était intéressant de trouver une matrice A' équivalente à A (au sens des opérations élémentaires) *échelonnée* voire *réduite*.

Voici une version algorithmique de l'algorithme de Gauss vu en cours. Il permet d'obtenir la matrice échelonnée A' à partir ce celle de A :

```
A est une matrice réelle de taille n x p
i,j = 1, 1
Tant que i <= n et j <= p faire :
    Si la j-ème colonne est non nulle :
        k0 = indice de la ligne <= i d'un élément non nul de la colonne j
        permuter Li et Lk_0
        Pour k de i+1 à n faire :
            Lk = Lk - (a_{k,j} / a_{i,j}) Li
        i=i+1
    j=j+1
A est alors échelonnée
```

Q 1 Tester cet algorithme à la main sur la matrice ci-dessous :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Q 2 Pousser ensuite les opérations élémentaires pour obtenir la matrice réduite.

Q 3 Recopier et modifier l'algorithme de Gauss pour obtenir l'algorithme de Gauss-Jordan.

Q 4 Résoudre par cette technique le système :

$$\begin{cases} 2z - 2t + 8u = -6 \\ x + 2y + z + 5u = -1 \\ -2x - 4y - z - 8u = -1 \end{cases}$$

Q 5 Contrôler les résultats en utilisant le fichier python fourni implémentant les algorithmes de Gauss et de Gauss-Jordan (il utilise la bibliothèque `numpy` pour davantage de souplesse d'écriture).