CHAPITRE

$\mathcal{2}$

√MATH

TSI[1]

Lycée Artaud

2025/2026

Systèmes et familles de vecteurs

Sommaire

I Généralités sur les systèmes linéaires

Voir l'activité d'introduction sur le ballon de football.

I.1 Notion de système linéaire

♪ Définition I.1.1 (Système linéaire)

On appelle système linéaire de n équations à p inconnues $(x_1, \dots, x_p)$, la donnée simultanée de n équations linéaires à p inconnues :

$$(S) : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \quad \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

Remarques –

- Les $a_{i,j}$ pour $(1 \leqslant i \leqslant n)$ et $(1 \leqslant j \leqslant p)$ sont les **coefficients**,
- Les x_k pour $(1 \leqslant k \leqslant p)$ sont les **inconnues**,
- Les b_i pour $(1 \leqslant i \leqslant n)$ sont les **seconds membres**.
- **Résoudre** (S) c'est chercher **tous les** p-uplets $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ tels que toutes les n égalités formant le système soient satisfaites en même temps.

Exemple (I.1.2)

On considère les systèmes :

$$(S_1) : \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases} \qquad (S_2) : \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 3 \end{cases} \qquad (S_3) : \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

Q 1 Le couple (0.5 ; 0.5) est-il solution de (S_1) ? Résoudre (S_1).

S1

Q 2 Le couple (0.5 ; 0.5) est-il solution de (S_2) ? Résoudre (S_2).

S2

Q 3 Le couple $(0.5\,;0.5)$ est-il solution de (S_3) ? Résoudre (S_3).

S3

On voit au travers de ces exemples que « tout est possible » quand on résout un système.

Définition I.1.3 (Sytème homogène associé)

Si (S) est le système :

$$(S) : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \quad \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

on appelle **système homogène associé à** S le système obtenu en remplaçant tous les b_i par 0 :

$$(S_0) : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = 0 \\ \quad \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = 0 \end{cases}$$

REMARQUES – Il est clair qu'un système homogène admet toujours au moins une solution, laquelle ?

. . . .

I.2 Interprétation géométrique

Pour des valeurs de p et n inférieures à 3, on peut interpreter un système comme des intersections de droites ou de plans. On munit le plan ou l'espace d'un repère. Interpréter chacun des systèmes suivants par un ou des graphiques (envisager toutes les possibilités) :

1. Soit $(S) : \begin{cases} ax + by = c \end{cases}$

S4

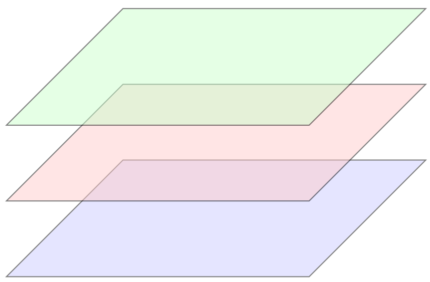
2. Soit $(S) : \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$ et $(a, b') \neq (0, 0)$

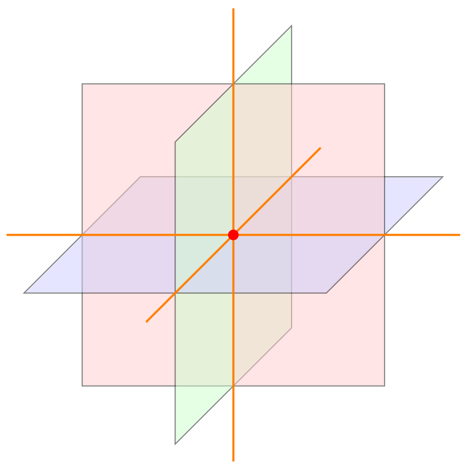
S5

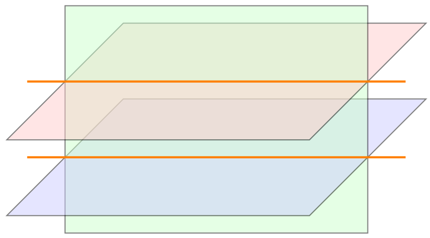
3. Soit $(S) : \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$

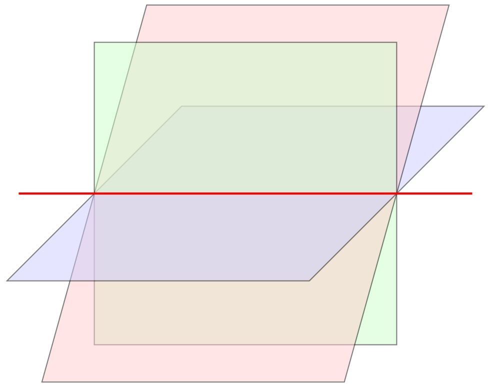
S6

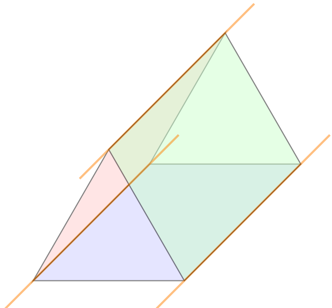
4. Soit $(S) : \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$ Il y a 5 cas à envisager :











☐ ✍ **Exercice Q.1**

I.3 Écriture matricielle d'un système linéaire

Lorsque que l'on manipule des systèmes (pour les résoudre par exemple) on se rend vite compte que l'on peut souvent se passer d'écrire les inconnues. C'est pourquoi on a introduit une notation *matricielle* dans laquelle n'apparaît que les coefficients.

♪ Définition I.3.1 (matrice)

Une **matrice** à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est la données de $n \times p$ éléments que l'on répartit dans un tableau à n lignes et p colonnes.
Par exemple l'ensemble des matrices à coefficients dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Remarques – On note parfois une matrice générique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ par $M = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$. Il est important de noter que le nombre $a_{i,j}$ se situe dans la matrice à la **ligne** i (premier indice) et à la **colonne** j (deuxième indice).

♪ Définition I.3.2 (Matrice d'un système linéaire, et matrice augmentée)

Considérons un système linéaire de n équations à p inconnues :

$$(S) : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

La matrice du système linéaire (S) est la matrice à n lignes et p colonnes :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

On définit aussi la matrice augmentée du système linéaire la matrice à n lignes et $p+1$ colonnes constituée de la matrice du système augmentée des seconds membres :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} & b_n \end{pmatrix}$$

Exemple (I.3.3)

On considère le système suivant : $(S) : \begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x - z = 2 \\ 3x + y - z = -1 \end{cases}$.

Écrire la matrice augmentée associée au système (S) :

S7

On considère une matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Écrire le système d'inconnues $x_1, x_2, \dots$ dont A serait la matrice augmentée :

S8

Remarques – L'introduction des matrices permet l'écriture d'un système sous la forme $AX = B$ où A, X et B sont des matrices :

- On verra plus tard dans l'année qu'il est possible de multiplier des matrices entre elles. Ici on se contentera de voir sur un exemple comment on peut multiplier une matrice $M \in \mathscr{M}_{n,p}$ par une matrice colonne $C \in \mathscr{M}_{p,1}$
  $\rightarrow$ **Attention, le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de C.**
  Effectuer le produit de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ par $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$:

S9

- On voit donc que le système :

$$(S) : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

peut s'écrire $AX = B$ en notant

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

☐ ✍ **Exercice Q.2**

I.4 Opérations élémentaires sur les lignes

Nous allons maintenant décrire des **opérations élémentaires** que l'on peut réaliser sur les lignes d'un système ou de sa matrice (augmentée) associée. On montrera ensuite que ces opérations donnent un nouveau système qui possède le même ensemble de solutions.

- Échanger deux lignes L_i et L_j, opération schématisée par $\boxed{L_i \leftrightarrow L_j}$.
- Multiplier une ligne L_i par un réel non nul α, schématisée par $\boxed{L_i \leftarrow \alpha L_i}$.
- Ajouter αL_j à L_i, schématisée par $\boxed{L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j}$.

Notons dès maintenant que ces trois types d'opérations sont **réversibles** :

- L'opération contraire de $L_i \leftrightarrow L_j$ est $L_j \leftrightarrow L_i$,
- L'opération contraire de $L_i \leftarrow \alpha L_i$ est $L_i \leftarrow \dfrac{1}{\alpha} L_i$,
- L'opération contraire de $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ est $L_i \leftarrow L_i - \alpha L_j$.

Définition I.4.1 (systèmes équivalents)

Deux systèmes linéaires (S) et (S') sont dits **équivalents** (c'est à dire au sens des opérations élémentaires sur les lignes) lorsque l'on passe de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes. On note alors $(S) \sim (S')$.

Propriété I.4.2 (Système équivalents)

Deux systèmes équivalents (au sens des opérations élémentaires) ont même ensemble de solutions.

Exemple (I.4.3)

Montrer que (S) : $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+3y=0 \end{cases}$ est équivalent à (S') $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$

S10

Définition I.4.4 (Matrices équivalentes par lignes)

Deux matrices A et A' sont dites **équivalentes** par lignes lorsqu'elles se déduisent l'une de l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur des lignes. On note alors $A \underset{L}{\sim} A'$.

Remarques –

- Si l'on passe d'un système linéaire (S) à un système linéaire (S') par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes alors la matrice augmentée de (S') s'obtient en effectuant la même suite d'opérations élémentaires sur la matrice augmentée de (S) et réciproquement.

- La réciproque évoquée ci-dessus implique que si deux matrices augmentées sont équivalentes par lignes alors les systèmes associés sont équivalents donc ont les même solutions.

- On a précisé pour les matrices que les opérations se faisaient sur les lignes, car par symétrie on serait bien tenté de faire des choses analogues sur les colonnes d'une matrice, ce qui n'était pas le cas pour un système…

II Échelonnement et algorithme du pivot de Gauss-Jordan

On a vu jusqu'à présent :

- comment faire évoluer un système par des opérations élémentaires sans changer l'ensemble solution,

- comment représenter de façon plus agréable (avec des matrices) les calculs effectués.

L'objectif de cette section est de voir qu'il est possible automatiser les calculs qui mènent d'un système quelconque à un système équivalent dont la résolution est triviale.

II.1 Matrices échelonnées par lignes

♪ Définition II.1.1 (matrice échelonnée par ligne)

Une matrice est dite **échelonnée par ligne** lorsqu'elle vérifie les deux propriétés suivantes :

- si une ligne est nulle alors toutes les lignes suivantes le sont aussi ;
- à partir de la deuxième ligne, dans chaque ligne non nulle, le premier coefficient non nul à partir de la gauche est situé strictement à droite du premier coefficient non nul de la ligne précédente.

On appelle pivot le premier coefficient non nul de chaque ligne non nulle.

Remarques – Un schéma valant mieux qu'un long discours, voici à quoi ressemble une matrice échelonnée par lignes :

$$\begin{pmatrix} \bullet & \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & \bullet & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & \bullet & \star & \star & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les $\bullet$ sont les pivots
Les $\star$ sont des coefficients quelconques

Exemple (II.1.2)

Dire pour chacune des matrices suivantes si elle est échelonnée par ligne et si oui entourer les pivots :

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ Oui ☐ Non ☐	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ Oui ☐ Non ☐	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ Oui ☐ Non ☐
$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ Oui ☐ Non ☐	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ Oui ☐ Non ☐	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Oui ☐ Non ☐

♪ Définition II.1.3 (Matrice échelonnée réduite)

Une matrice *échelonnée par ligne* est dite **échelonnée réduite par ligne** lorsqu'elle est nulle ou lorsque :

- tous ses pivots sont égaux à 1;
- ses pivots sont les seuls éléments non nuls de leur colonne.

Exemple (II.1.4)

Dire pour chacune des matrices suivantes si elle est échelonnée réduite par ligne et si oui entourer les pivots :

$\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&1\end{pmatrix}$ Oui ☐ Non ☐	$\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&2&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ Oui ☐ Non ☐	$\begin{pmatrix}1&0&-1&3\\0&1&1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ Oui ☐ Non ☐
$\begin{pmatrix}1&2&0&4\\0&0&1&2\end{pmatrix}$ Oui ☐ Non ☐	$\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&0&2\\0&0&1&1\end{pmatrix}$ Oui ☐ Non ☐	$\begin{pmatrix}1&2&1&4\\0&0&1&2\end{pmatrix}$ Oui ☐ Non ☐

☐ ✍ **Exercice Q.3**

II.2 Résolution d'un système échelonné

Les systèmes linéaires dont la matrice augmentée est échelonnée par lignes sont très facile à résoudre. Voyons cela sur des exemples :

Exemple (II.2.1)

Résoudre le système (S) dont la matrice augmentée est (elle est échelonnée réduite par ligne) :

$$A = \begin{pmatrix}1&0&2&0&4\\0&1&2&0&1\\0&0&0&1&2\end{pmatrix}$$

S11

Même question avec :

$$B = \begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&1&-1&3\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

S12

☐ ✍ **Exercice Q.4**

On vient de voir que les systèmes échelonnés réduits sont faciles à résoudre. Voyons qu'il est (théoriquement et automatiquement) possible d'échelonner (et réduire) n'importe quel système avec la méthode du pivot de Gauss.

II.3 Description de l'algorithme du pivot de Gauss

Le principe de l'algorithme de Gauss-Jordan est de travailler colonne par colonne, de la gauche vers la droite. Par opérations élémentaires successives sur les lignes, on aboutit à une matrice échelonnée réduite. Afin de mieux comprendre le fonctionnement de cet algorithme, on va le scinder en deux :

- un premier algorithme va échelonner la matrice ; *(Gauss)*
- un second la réduira. *(Jordan)*

II.3.1 Échelonnement de la matrice

On considère une matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}$.

Étape 1 :
- Si la matrice est vide (0 colonne ou 0 ligne), ou nulle, elle est déjà échelonnée et on s'arrête.
- Si la première colonne est nulle alors $A = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \\ \vdots & A' \\ 0 & \end{array}\right)$ et on recommence avec la matrice A' (que l'on nommera encore A dans la suite mais qui a une colonne de moins),
- Sinon, on passe à l'étape 2.

Étape 2 : Il existe un élément non nul dans la première colonne, donc quitte à échanger deux lignes (opération $L_1 \leftrightarrow L_i$), on peut supposer que $a_{1,1} \neq 0$.

Étape 3 : $a_{1,1}$ étant non nul, on peut effectuer pour toutes les lignes $2 \leqslant i \leqslant n$ l'opération $L_i \leftarrow L_i - \dfrac{a_{i,1}}{a_{1,1}} L_1$ qui permet d'obtenir une matrice de la forme $\left(\begin{array}{c|ccc} a_{1,1} & \star & \star & \star \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{array}\right)$ avec $a_{1,1} \neq 0$ et A' éventuellement vide.
La matrice A' possède une colonne (et une ligne) de moins. On recommence à l'étape 1.

Remarques –

- Puisque à chaque passage, on diminue soit une colonne (étape 1) soit une colonne et une ligne (étape 3), **on est sûr que cet algorithme termine**. On peut même dire qu'il y aura au maximum $\min(n-1, p-1)$ passages effectués.
- Les opérations effectuées sont des opérations élémentaires sur des lignes, donc la matrice obtenue en sortie est équivalente par ligne à celle en entrée, et les solutions du système associé sont donc conservées.

Exemple (II.3.1)

Faire fonctionner cet algorithme sur la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

S13

II.3.2 Réduction de la matrice échelonnée

On va encore procéder par colonne, de gauche à droite :

- S'il n'y a pas de pivot sur la colonne, on ne fait rien, et on passe à la colonne suivante,
- Sinon, supposons que l'on soit sur la colonne j et que le pivot soit en ligne i et qu'il vale α.
  On effectue alors :
  - $L_i = \dfrac{1}{\alpha} L_i$ pour le rendre égal à 1
  - pour tout $1 \leqslant k < i$: $L_k \leftarrow L_k - a_{k,j} L_i$ pour annuler tous les coefficients au dessus du pivot.

Exemple (II.3.2)

Poursuivre la réduction de la matrice A de l'exemple précédent

S14

II.3.3 Existence et unicité d'une matrice échelonnée réduite par lignes

On vient de voir que l'algorithme de Gauss-Jordan permet à partir d'une matrice A d'obtenir une matrice équivalente échelonnée réduite par lignes. On admettra l'unicité.

☺ Théorème II.3.3

Toute matrice est équivalente par lignes à une **unique** matrice échelonnée réduite par lignes.

☐ ✍ **Exercice Q.5** ☐ ✍ **Exercice Q.6**

III Ensemble des solutions d'un système

Après avoir détaillé tous ces outils, il est temps de préciser en fonction des diverses situations possibles, à quoi ressemble l'ensemble des solutions d'un système…

III.1 Vocabulaire

♪ Définition III.1.1 (Inconnues principales et secondaires)

On note A_0 la matrice (non augmentée, c'est à dire sans le second membre) d'un système linéaire (S) et R_0 sa matrice échelonnée réduite. Alors :

- les inconnues correspondant aux colonnes des pivots de R_0 sont appelées **inconnues principales** ;
- les autres inconnues sont appelées les **inconnues secondaires** ou **paramètres**.

♪ Définition III.1.2 (Système compatible ou incompatible)

En conservant les mêmes hypothèses,

- si le système (S) admet au moins une solution alors on dit que le système est **compatible** ;
- si le système (S) n'admet aucune solution alors on dit que le système est **incompatible**.

Exemple (III.1.3)

Dans l'espace muni d'un repère, on considère trois plans d'équations respectives

$$x+y=1, \quad -x-y+z=1 \qquad \text{et} \quad 2x+2y-z=0$$

Déterminer l'intersection de ces 3 trois plans.

S15

III.2 Structure de l'ensemble des solutions

Synthétisons tous les résultats vus précédemment :

♪ Définition III.2.1 (rang)

- On appelle **rang d'une matrice** A, et on note $rg(A)$, le nombre de pivots de la matrice échelonnée (réduite).

- On appelle **rang du système** (S), et on note $rg(S)$, le nombre de pivots (nombre d'inconnues principales) de la matrice échelonnée réduite du système **homogène** associé **(attention !)**.

Propriété III.2.2

Le rang étant le nombre de pivots, on a : $rg(S) \leqslant \min(n, p)$.

Propriété III.2.3

Soit A la *matrice augmentée* d'un système linéaire (S) à p inconnues et R sa matrice échelonnée réduite par lignes.

- Si R contient la ligne $[0 \dots 0\ 1]$ alors (S) est **incompatible**.
- Sinon :
  - s'il n'y a que des inconnues principales ($rg(S) = p$) alors (S) admet une **unique solution**.
  - s'il y a au moins une inconnue secondaire alors (S) admet une **infinité de solutions**.

On peut conclure sur la structure des solutions d'un système par la propriété admise ici :

Propriété III.2.4

Soit (S) un système linéaire et (S_0) le système homogène associé.
Si $X_p \in \mathbb{R}^p$ est une solution particulière de (S), alors en notant $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de (S) et $\mathscr{S}_0$ l'ensemble des solutions de (S_0) on a :

$$\mathscr{S} = \{X_p + X_H,\ X_H \in \mathscr{S}_0\} = X_p + \mathscr{S}_0$$

Remarques – cela n'est pas sans vous rappeler quelque chose du chapitre sur les équations différentielles...

☐ ✍ **Exercice Q.7** ☐ ✍ **Exercice Q.8** ☐ ✍ **Exercice Q.9**

IV Famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$

IV.1 Combinaison linéaire

Remarques –

- on appellera vecteurs de $\mathbb{R}^n$ les n-uplets de réels.
- on parlera de vecteurs, mais on omettra toutes les flèches pour alléger les notations. Il faudra faire attention à distinguer les *vecteurs* des *scalaires*.

♪ Définition IV.1.1

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $\mathscr{F} = \{u_1, ..., u_p\}$ une famille de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

- Une **combinaison linéaire** de vecteurs de $\mathscr{F}$ est un vecteur de la forme :

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p \text{ avec } \lambda_1, \dots \lambda_p \text{ des scalaires.}$$

- L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathscr{F}$ se note $Vect(\mathscr{F})$.

☐ ✍ **Exercice Q.10** ☐ ✍ **Exercice Q.11**

IV.2 Familles libres et familles liées

♪ Définition IV.2.1

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $\mathscr{F} = \{u_1, ..., u_p\}$ une famille de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

- On dit qu'une famille $\mathscr{F}$ est **libre** lorsque la seule combinaison linéaire nulle de vecteurs de $\mathscr{F}$ est celle dont tous les coefficients sont nuls :

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p = 0 \implies \forall i \in [\![1\,;p]\!],\ \lambda_i = 0$$

(on dit aussi que les vecteurs de $\mathscr{F}$ sont linéairement indépendants.)

- Une famille qui n'est pas libre est dite **liée**.

Méthode – Pour montrer si une famille $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ est libre ou liée on résout le système (à n lignes) dont les inconnues sont les $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$:

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p = 0$$

Ce système est toujours compatible puisque le p-uplet $(0, \ldots, 0)$ est toujours solution. La famille est libre si et seulement si ce p-uplet nul est la seule solution du système.
D'après les sections précédentes sur la résolution des système on peut mettre en évidence la propriété suivante :

Propriété IV.2.2

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $\{u_1, \ldots, u_p\}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Soit A la matrice de taille (n, p) dont les colonnes sont constituées des coordonnées des vecteurs $u_1, \ldots, u_p$. Il y a équivalence entre:

- La famille $\{u_1, \ldots, u_p\}$ est libre.
- Le système $AX = 0$ a pour seule solution la solution triviale $(0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^p$.
- Le nombre de pivots de A est p.
- $rg(A) = p$

Remarques – Si $p > n$ alors la famille $\{u_1, \ldots, u_p\}$ **ne peut pas** être libre dans $\mathbb{R}^n$ car on a les inégalités :

$$rg(A) \leqslant \min(n, p) < p$$

☐ ✍ **Exercice Q.12**

IV.3 Familles génératrices

♪ Définition IV.3.1

Soit $\mathscr{F} = \{u_1, \ldots, u_p\}$ une famille de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On dit que $\mathscr{F}$ est génératrice de $\mathbb{R}^n$ lorsque

$Vect(\mathscr{F}) = \mathbb{R}^n$, c'est à dire :

$$\forall u \in \mathbb{R}^n,\ \exists(\lambda_1, \dots \lambda_p) \in \mathbb{R}^p,\ \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p = u$$

☺ **Théorème IV.3.2**

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $\{u_1, \ldots, u_p\}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Soit A la matrice de taille (n, p) dont les colonnes sont constituées des coordonnées des vecteurs $u_1, \ldots, u_p$. Il y a équivalence entre:

- La famille $\{u_1, \ldots, u_p\}$ est génératrice de $\mathbb{R}^n$.
- Pour toute matrice colonne $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le système $AX = B$ est compatible,
- $rg(A) = n$

Remarques – Si $p < n$ alors la famille $\{u_1, \ldots, u_p\}$ **ne peut pas** être génératrice dans $\mathbb{R}^n$ car on a les inégalités :

$$rg(A) \leqslant \min(n, p) < n$$

☐ ✍ **Exercice Q.13**

IV.4 Forme explicite, forme implicite

On a vu qu'une famille de vecteurs $\mathscr{F} = \{u_1, ..., u_p\}$ engendrait un *espace* $F = Vect(u_1, ..., u_p)$. Cet espace est ainsi déterminé par une expression **explicite** (c'est à dire par une équation paramétrique). Parfois ce même espace peut être défini de manière **implicite** (c'est à dire par une équation cartésienne). Il est utile, comme en géométrie de savoir passer d'une expression à l'autre.

Voyons cela via les exercices :

☐ ✍ **Exercice Q.14** ☐ ✍ **Exercice Q.15**