Planche P
Géométrie dans l'espace

☐ Exercice P1 (Rappels pour bien commencer ;-))

On considère les points $A(1;5;2)$, $B(-2;3;4)$, $C(-2;-2;0)$ et $D(7;-3;1)$.

Q 1 Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont-ils colinéaires ?

Q 2 Déterminer les coordonnées du milieu I du segment $[AB]$.

Q 3 Déterminer les coordonnées du point K tel que $ABCK$ soit un parallélogramme.

Q 4 Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{v} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$.

Q 5 Soit $E(-5;1;6)$. Les points A, B et E sont-ils alignés ?

☐ Exercice P2 (colinéarité, produit vectoriel)

Dans une base orthonormée directe on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} m \\ 1+m \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 1-m \\ -1 \end{pmatrix}$ où m est un nombre réel. Déterminer les valeurs éventuelles de m pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.
(Envisager deux méthodes...)

☐ Exercice P3 (Identité de Lagrange)

Q 1 On pose $A = ||\vec{u} \wedge \vec{v}||^2$, $B = (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$ et $C = ||\vec{u}||^2||\vec{v}||^2$.
À partir des expressions analytiques (c'est à dire les formules avec les coordonnées) du produit vectoriel, du produit scalaire et de la norme, démontrer que $A + B = C$, c'est à dire que

$$||\vec{u} \wedge \vec{v}||^2 + (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = ||\vec{u}||^2||\vec{v}||^2 \quad \text{(identité de Lagrange)}$$

Q 2 Retrouver alors la relation : $||\vec{u} \wedge \vec{v}|| = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times |\sin(\vec{u}, \vec{v})|$

Q 3 Application (et rappel du plan) : exprimer l'aire d'un parallélogramme $ABCD$ à l'aide d'un produit vectoriel.

☐ Exercice P4 (Double produit vectoriel)

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires.

Q 1 **a.** Donner une base orthonormée $(\vec{I}, \vec{J})$ de $Vect(\vec{u}, \vec{v})$.

b. Par quel vecteur $\vec{K}$ peut-on compléter la base précédente pour obtenir une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$?

c. Vérifier que dans cette base on a $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} b \\ c \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$.

Q 2 Montrer que $\boxed{(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w})\,\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\,\vec{u}}$

Q 3 Donner $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$ et comparer à $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$.

□ Exercice P5 (Produit vectoriel, aire)

Soit $OABC$ un tétraèdre rectangle en O, c'est à dire que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ soient orthogonaux deux à deux.
On souhaite montrer que le carré de l'aire du triangle ABC est égale à la somme des carrés des aires des trois autres triangles OAB, OAC et OCA :

Q 1 Faire une figure.

Q 2 Exprimer l'aire du triangle ABC à l'aide du produit vectoriel des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Q 3 Calculer le $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ en remarquant que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$.

Q 4 Conclure.

□ Exercice P6 (Produit vectoriel, déterminant)

Q 1 Calculer l'aire du triangle ABC avec $A(1, 2, -1)$, $B(-1, 1, 0)$, $C(0, 1, 2)$.

Q 2 Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$ avec $A(1, 2, 3)$, $B(3, -1, -1)$, $C(2, 0, 1)$ et $D(1, 1, 2)$.

□ Exercice P7 (Déterminant)

On considère les points $A(-1, 1, 2)$, $B(1, 0, 1)$, et $C(1, 2, 7)$. Les points A, B, C et O sont-ils coplanaires ?

□ Exercice P8 (Famille libre, déterminant, changement de base)

Dans la base orthonormée $\mathcal{B}_1\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Q 1 Montrer que $\mathcal{B}_2 = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base.

Q 2 Soit $\vec{t}\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}$. Déterminer les coordonnées de $\vec{t}$ dans $\mathcal{B}_2$.

□ Exercice P9 (produit scalaire, produit vectoriel, déterminant)

Soient $A(1; 3; 0)$, $B(3; 1; 0)$, $C(4; 4; 0)$ et $S(4; 4; 2)$.

Q 1 **a.** Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

b. Déterminer les longueurs BA et BC ainsi qu'une valeur approchée arrondie à l'unité (en degré) de la mesure de l'angle non orienté $\left(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}\right)$.

Q 2 **a.** Calculer l'aire du parallélogramme $ABCD$.

b. Montrer que la droite (SC) est une hauteur de la pyramide $SABCD$ *(On pourra calculer $\vec{n} = \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}$...)*

c. Déduire des questions précédentes la volume $\mathcal{V}$ de la pyramide $SABCD$.

d. Retrouver ce résultats par un calcul de déterminant.

□ Exercice P10 (équation cartésienne de plans)

Dans chacun des cas, donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$:

Q 1 qui passe par les points $A(1;1;1), B(2;1;-1)$ et $C(1;0;1)$;

Q 2 qui passe par $A(-2;1;-3)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix}$;

Q 3 qui passe par $A(0;-1;-3)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$

Q 4 qui passe par $A(1,2,3)$ et qui contient la droite $\mathcal{D} = B + Vect(\vec{u})$ où $B(-2,1,0)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$.

□ Exercice P11 (équation paramétrique ↔ équation cartésienne)

Q 1 Soit $\mathcal{P}_1$ le plan d'équation paramétrique : $\mathcal{P}_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t + 3t' \\ y = -2 + t - 2t' \\ z = -t + 2t' \end{cases} \qquad (t, t') \in \mathbb{R}^2$

Donner une équation cartésienne de $\mathcal{P}_1$.

Q 2 Soit $\mathcal{P}_2$ le plan d'équation cartésienne : $\mathcal{P}_2 : 3x - y + 2z = 1$.
Déterminer une équation paramétrique de $\mathcal{P}_2$.

□ Exercice P12

Soit $\vec{n}$ un vecteur unitaire et A un point fixé. Déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 2$.

□ Exercice P13 (Distance point/plan (sans formule))

Q 1 Calculer la distance du point $A(1,2,3)$ au plan $\mathcal{P} : 2x - y - z - 4 = 0$.

Q 2 Calculer la distance du point $A(1,1,1)$ au plan $\mathcal{P}$ passant par le point $B(2,3,1)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u}(1,-1,2)$ et $\vec{v}(-1,2,1)$.

□ Exercice P14 (Distance point/plan (formules))

On considère un plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne : $ax + by + cz + d = 0$, passant par un point A dirigé par les vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et de vecteur normal $\vec{n}$.

Q 1 En utilisant le projeté orthogonal H de M sur $\mathcal{P}$, monter que $d(M, \mathcal{P}) = \dfrac{|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$.

Q 2 Montrer que $d(M, \mathcal{P}) = \dfrac{\left|\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v})\right|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}$.

Q 3 Soit $M(x_M, y_M, z_M)$ un point. Montrer que $d(M, \mathcal{P}) = \dfrac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

□ Exercice P15 (Distance, plans bissecteurs)

Soit $\mathcal{P}_1 : 4x + 4y - 7z - 1 = 0$ et $\mathcal{P}_2 : 8x - 4y + z - 7 = 0$. Former les équations cartésiennes des plans bissecteurs de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

□ Exercice P16 (équation paramétrique de droite)

Dans un repère on donne les points $A(3;1;-1)$ et $B(5;0;2)$.

Q 1 Écrire une équation paramétrique de la droite (AB).

Q 2 Les points $M(-1;3;-7)$ et $N(1;2;-1)$ appartiennent-ils à (AB) ?

□ Exercice P17 (équation cartésienne de droite)

Considérons la droite $\mathcal{D} = (A, \vec{u})$, où $A(1,2,3)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Q 1 Écrire un système d'équations cartésiennes de la droite $\mathcal{D}$

Q 2 Écrire un système d'équations cartésiennes de la droite $\mathcal{D}$ avec deux plans orthogonaux.

□ Exercice P18 (droites : cartésienne → paramétrique)

Q 1 Dans chaque cas, déterminer une équation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ de système d'équation cartésien :

a. $\mathcal{D} : \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 3z + 2 \end{cases}$ **b.** $\mathcal{D} : \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \end{cases}$

□ Exercice P19 (positions relatives de droites)

Dans un repère de l'espace on considère les droites :

$$\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{et } \mathcal{D}_2 : \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = -2 + t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Q 1 Démontrer (sans chercher de point d'intersection) que les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont sécantes.

Q 2 Déterminer ensuite les coordonnées du point d'intersection.

□ Exercice P20 (droites/divers)

Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par les points $A(1;-2;-1)$ et $B(3;-5;-2)$.

Q 1 Donner un système d'équations paramétriques de $\mathcal{D}$.

Q 2 Soit $\mathcal{D}'$ la droite admettant pour système d'équations paramétriques: $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t, t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$

Démontrer que les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas coplanaires.

Q 3 $\mathcal{P}$ est le plan d'équation $4x + y + 5z + 3 = 0$.

a. Démontrer que $\mathcal{P}$ contient la droite $\mathcal{D}$.

b. Démontrer que $\mathcal{P}$ coupe la droite $\mathcal{D}'$ en un point C dont les coordonnées sont à déterminer.

Q 4 (Δ) est la droite passant par C et de vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a. Démontrer que (Δ) et $\mathcal{D}'$ sont coplanaires et orthogonales.

b. Démontrer que (Δ) coupe perpendiculairement $\mathcal{D}$ en un point E dont on déterminera les coordonnées.

☐ Exercice P21 (distance point/droite)

Soit $M(1,1,1)$ et $\mathcal{D}\left\{\begin{array}{l} 2x+3y+4z+2=0 \\ 3x+4y+2z+3=0 \end{array}\right.$. Déterminer la distance de M à $\mathcal{D}$.

☐ Exercice P22 (distance point/droite, projection orthogonale sur une droite)

Soit $\mathcal{D}$ la droite admettant pour système d'équations cartésiennes : $\left\{\begin{array}{l} x+3y+2z-5=0 \\ x+y-3=0 \end{array}\right.$

Q 1 Le point $A(0;2;0)$ appartient-il à $\mathcal{D}$?

Q 2 Déterminer la distance du point A à la droite $\mathcal{D}$.

Q 3 Trouver une équation du plan $\mathcal{P}$ contenant $\mathcal{D}$ et passant par A.

Q 4 Soit $\mathcal{D}'$ la droite admettant pour système d'équations cartésiennes: $\left\{\begin{array}{l} x-z-1=0 \\ 3x-2y-z-2=0 \end{array}\right.$.
$\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont-elles parallèles ?

Q 5 Déterminer le projeté orthogonal de $E(1;2;3)$ sur $\mathcal{D}'$.

☐ Exercice P23 (perpendiculaire commune)

Attention, plus difficile... Déterminer un système d'équation cartésienne de la droite Δ perpendiculaire commune aux deux droites :

$$\mathcal{D}\left\{\begin{array}{l} x+y-3z+4=0 \\ 2x-z+1=0 \end{array}\right. \quad \text{et } \mathcal{D}'\left\{\begin{array}{l} x=z-1 \\ y=z-1 \end{array}\right.$$

(Indic : déterminer $\vec{n}$ vecteur normal commun à $\mathcal{D}$ et à $\mathcal{D}'$, puis les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ ayant tous deux $\vec{n}$ pour vecteur directeur et contenant respectivement $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$...)

☐ Exercice P24 (distance deux droites)

Calculer la distance entre la droite $\mathcal{D}$ passant par $A(1,2,3)$ et dirigée par $\vec{u}(-2,-1,1)$ et la droite $\mathcal{D}'$ passant par $A'(-1,0,1)$ et dirigée par $\vec{u}'(-3,2,-1)$.
Indic : utiliser les formules de volumes...

☐ Exercice P25 (sphère)

On considère $A(-1;2;1), B(1;-6;-1), C(2;2;2)$ et $L(0;1;-3)$.

Q 1 Déterminer une équation cartésienne du plan contenant les points A, B et C. Le point L appartient-il à ce plan ?

Q 2 Soient $\mathcal{P} : x+y-3z+2=0$ et $\mathcal{P}'$ le plan $\left(O;\vec{\imath},\vec{k}\right)$. Déterminer une équation paramétrique de l'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.

Q 3 Écrire une équation de la sphère $\mathcal{S}$ de centre L et de rayon 5.

Q 4 Quelle est la nature de $\mathcal{S} \cap \mathcal{P}$?

Q 5 Déterminer l'intersection de $\mathcal{S}$ avec la droite (OJ) où $J(0;1;0)$.

☐ Exercice P26 (sphère)

Soient $A(-3;1;-5)$ et $B(0;5;-2)$. Donner une équation cartésienne de la sphère de diamètre $[AB]$.

□ Exercice P27 (sphère, plan tangent)

On considère l'ensemble $\mathcal{S}$ des points $M(x; y; z)$ tels que:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 4z = 11$$

Q 1 Montrer que $\mathcal{S}$ est une sphère dont on donnera le centre et le rayon.

Q 2 Montrer que le point $A(1; -3; 7)$ appartient à la sphère $\mathcal{S}$.

Q 3 Donner les coordonnées du point A' diamétralement opposé au point $A(1; -3; 7)$.

Q 4 Donner les équations cartésiennes des plans tangents à $\mathcal{S}$ en A et en A'.