

(P20) Q1. $\vec{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Q2: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - 3t \\ z = -1 - t \end{cases}$

Q2. $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ vecteur directeur de $\mathcal{D}$

$\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ————— $\mathcal{D}'$

$A(1, -2, -1) \in \mathcal{D}$ et $C(2, 1, 0) \in \mathcal{D}'$

Rappel: $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ copl. $\Leftrightarrow \vec{AC}, \vec{u}, \vec{v}$ coplanaires.

On:

$\det(\vec{AC}, \vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 2 \times 0 - 7 \neq 0$

Donc $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ non coplanaires

Q3a. On remplace:

$4(1+2t) + (-2-3t) + 5(-1-t) + 3$

$= 4 - 2 - 5 + 3 + 8t - 3t - 5t$

$= 0$ Donc $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$

Q3b On résout:

$\begin{cases} 4x + y + 5z + 3 = 0 \\ x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases}$

on remplace x, y, z : $4(2-t) + (1+2t) + 5t + 3 = 0$

$8 + 1 + 3 + 3t = 0$

$t = -4$

d'où $C(6, -7, -4) = \mathcal{P} \cap \mathcal{D}'$

Q4a * On a déjà $C \in \mathcal{D}' \cap \Delta$ donc $\mathcal{D}'$ et Δ copl.

* $\vec{v} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ Donc Δ et $\mathcal{D}'$ copl. et orthogonals

Q4b * $\vec{v} \cdot \vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 - 3 + 1 = 0$

Donc $\mathcal{D}$ et Δ orthogonales.

* Cherchons un point d'intersection éventuel en résolvant le système:

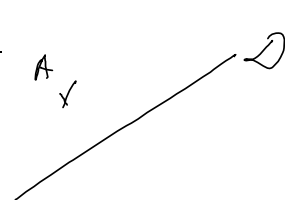
$\Delta = \mathcal{D} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 + t = 1 + 2t' \\ -7 + t = -2 - 3t' \\ -4 - t = -1 - t' \end{cases}$

----- $t = -1$ et $t' = 2$.

d'où $\Delta \cap \mathcal{D} = E(5; -8; -3)$

(R) Δ est la perpendiculaire commune à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$

(P22) Q1. On remplace les coord. de A ds D.
Cela ne fonctionne pas, donc $A \notin D$.

Q2.  on cherche un point $B \in D$
et un vecteur directeur $\vec{u}$ de D.

* En prenant $y=0$ dans $x+y-z=0$ on trouve $x=3$. On reporte dans $x+3y+2z-5=0$ et on trouve $z=1$.

Donc $B(3, 0, 1) \in D$.

* $\vec{m}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est normal à P_1 et $\vec{m}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ normal à P_2 .

Ainsi: $\vec{u}' = \vec{m}_1 \wedge \vec{m}_2$ directeur pour D.

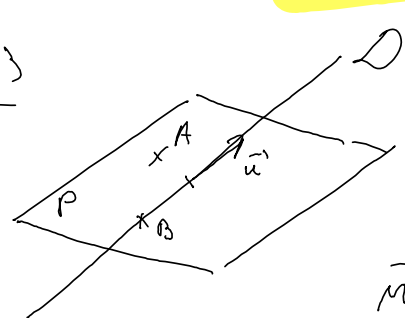
On a: $\vec{u}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

prenons $\vec{u} = -\frac{1}{2} \vec{u}' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vect. dir. de D.

* Alors: $\text{dist}(A, D) = \frac{\|\vec{AB} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$

Or $\vec{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{AB} \wedge \vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Donc $\text{dist}(A, D) = \sqrt{\frac{1+4+1}{1+1+1}} = \sqrt{2}$

Q3.  On a $P = A + \text{vect}(\vec{u}, \vec{AB})$
Donnons un vecteur normal à P:
 $\vec{m} = \vec{AB} \wedge \vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

D'où P: $-(x-x_A) - 2(y-y_A) - (z-z_A) = 0$

(i) $P: x + 2y + z - 4 = 0$

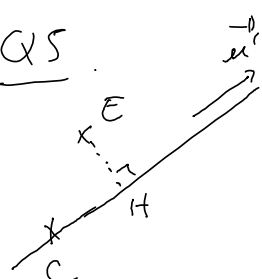
Q4. On sait que D dirigée par $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Cherchons un vect. dir de D':

* $\vec{m}_1' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{m}_2' \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ normaux à P_1' et P_2' .

d'où $\vec{u}' = \vec{m}_1' \wedge \vec{m}_2' = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\vec{u}$ et $\vec{u}'$ non colinéaires, donc D et D' non //.

Q5.  Étape 1: cherchons un point C sur D':
 $C(1, \frac{1}{2}, 0) \in D'$

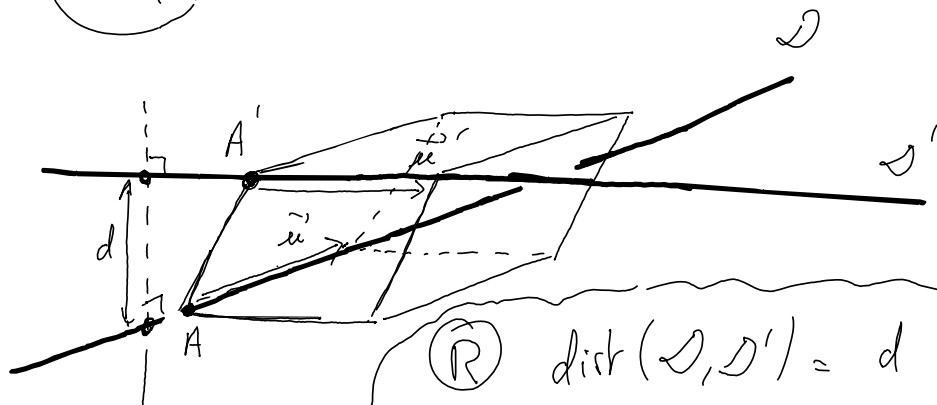
Étape 2: $H(x, y, z)$ proj. OG de E sur D'
 $\Leftrightarrow \begin{cases} H \in D' \\ \vec{EH} \cdot \vec{u}' = 0 \end{cases}$ $\vec{u}' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - z - 1 = 0 \\ 3x - 2y - z - 2 = 0 \\ x - 1 + y - 2 + z - 3 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - z = 1 \\ 3x - 2y - z = 2 \\ x + y + z = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = 2 \\ z = \frac{3}{2} \end{cases}$

$H\left(\frac{5}{2}, 2, \frac{3}{2}\right)$

P24



(R) $\text{dist}(D, D') = d$
 $=$ hauteur du $\#$ construit
sur $(A, \vec{AA'}, \vec{u}, \vec{u'})$

or on a: $\text{Vol}(\text{prisme}) = \text{Aire}(\text{base}) \times \text{hauteur}$.

ici: $\ast \text{Vol} = |\det(\vec{AA'}, \vec{u}, \vec{u'})|$

$$= |(\vec{u} \wedge \vec{u'}) \cdot \vec{AA'}| = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \left| \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = 2 + 10 + 14 = 26$$

$\ast \text{Aire base} = \|\vec{u} \wedge \vec{u'}\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1+25+49}$

Donc

$$\text{dist}(D, D') = \frac{26}{5\sqrt{5}}$$