

PLANCHE O

EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

À noter : pour ce chapitre assez calculatoire, il ne faut pas hésiter à utiliser le logiciel **XCAS Web** afin de se guider dans les calculs, ou tout simplement de les vérifier... (voir dernière page).

Partie 1 : primitives / intégrales

□ Exercice O1

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

Q1 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{3x^2 + 1}}$

Q3 $f(x) = \frac{\cos x}{2 \sin(x) - 5}$

Q5 $f(x) = (5x + 2)^6$

Q2 $f(x) = \frac{x}{x^2 + 3}$

Q4 $f(x) = xe^{x^2-1}$

Q6 $f(x) = (2x + 1)(x^2 + x + 1)^5$

□ Exercice O2

Déterminer les primitives des fonctions :

Q1 $f(x) = \tan x$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

Q2 $g(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$ sur \mathbb{R}

Q3 $h(x) = \frac{\ln x}{x}$ sur \mathbb{R}_+^*

□ Exercice O3

Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \cos^3(x)$ par 2 méthodes :

Q1 En linéarisant f

Q2 En remarquant que $f(x) = (1 - \sin^2(x)) \cos(x)$

□ Exercice O4

Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \cos(2x) \sin(3x)$ (Transformer les produits en somme... On peut contrôler son résultat avec le site **XCAS en ligne** avec la commande `tlin(cos(2x)*sin(3x))`).

□ Exercice O5

Déterminer une primitive de :

Q1 $f : x \mapsto \frac{1}{(x+1)^2}$ pour $x \in \mathbb{R}^+$

Q2 $f : x \mapsto \frac{1}{x^2 + \gamma^2}$

Q3 $f : x \mapsto \frac{1}{x^2 - 2x + 2}$
(penser à la forme canonique)

Q4 $f : x \mapsto \frac{1}{(x-1)(x-2)}$
(écrire f sous la forme $\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}$)

Q5 $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$ pour $x \in \left]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right[$

□ Exercice O6

Calculer les primitives :

Q1 $\int \frac{1}{1+e^x} dx$

Q3 $\int \frac{5}{(3x+1)^3} dx$

Q5 $\int \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}} dx$

Q2 $\int \cos(7x) \cos(9x) dx$

Q4 $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos(x)+2}} dx$

Q6 $\int \tan(2x) dx$

□ Exercice O7

Calculer à l'aide des nombres complexes les primitives qui s'annulent en 0 des fonctions suivantes :

Q1 $f(x) = e^x \cos x$

Q2 $f(x) = e^x \cos^2 x$

□ Exercice O8

Calculer les intégrales suivantes :

Q1 $I = \int_0^\pi |\cos(2x)| dx$

Q2 $J = \int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx$

□ Exercice O9

f et g sont les fonctions définies sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = 4 - x^2 \quad \text{et} \quad g(x) = 1 - \frac{1}{4}x^2$$

Q1 Déterminer les points d'intersection des courbes représentatives de f et g .

Q2 Déterminer l'aire en u.a., du domaine situé entre les deux courbes.

□ Exercice O10

On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{\cos x - \sin x} dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{\cos x - \sin x} dx$

Q1 Calculer $I + J$ et $I - J$.

Q2 En déduire I et J .

□ Exercice O11

Q1 Quel est l'ensemble des points $M(x, y)$ vérifiant : $x^2 - 4x + y^2 = 0$?

Q2 Quel est l'ensemble des points $M(x, y)$ vérifiant $y = f(x)$ avec $f(x) = \sqrt{4x - x^2}$, $x \in [0; 4]$?

Q3 Par des considérations géométrique, déterminer la valeur de $I = \int_0^4 \sqrt{4x - x^2} dx$.

□ Exercice O12

On considère la fonction $f(x) = e^{2x+3}$. Déterminer la largeur du rectangle de longueur 2 dont l'aire, en u.a., est égale à $\int_0^2 f(x) dx$.

Partie 2 : équations différentielles

□ Exercice O13

Résoudre les équations différentielles :

Q1 $y' - 2y = 0$

Q2 $3y' + 5y = 4$

Q3 $y' + 3y = 2e^{3t}$

Q4 $y' + 3ty = 0$

□ Exercice O14

Q1 $y' + 2y = 3e^{-t}$

Q2 $y' + y = te^{-t}$ (indic: $y_p(t) = P(t)e^{-t}$ avec P polynome de degré 2)

Q3 $y' - 2y = \cos(x) + 2\sin(x)$

Q4 $2y' - 3y = \sin^2 x$ (On pourra linéariser le second membre)

Q5 $y' - 2y = \sin(2t)e^t$

Q6 $(1 + t^2)y' - ty = \sqrt{1 + t^2}$

□ Exercice O15

Soit (E) : $y' - \frac{y}{x^2} = x - \frac{1}{2x}$ à résoudre sur $]0; +\infty[$.

Q1 Résoudre l'équation homogène associée.

Q2 Chercher une solution particulière de (E) sous la forme d'un polynôme de degré 2.

Q3 En déduire la solution f de (E) sur $]0; +\infty[$ vérifiant $f(1) = 0$.

□ Exercice O16 (Variation de la constante)

On souhaite résoudre sur $I =]1; +\infty[$ l'équation : $(E) \quad y' + \frac{1}{x}y = \frac{x}{x-1}$.

Q1 Déterminer les solutions f_h de l'équation homogène associée.

Q2 On note $f_0(x) = \frac{1}{x}$ une des solutions de l'équation homogène.

On va chercher une solution particulière de (E) sous la forme : $f_p(x) = \lambda(x)f_0(x)$.

a. Remplacer f_p dans l'équation (E) pour en déduire que f_p est solution de (E) si et seulement si $\lambda'(x) = \frac{x^2}{x-1}$.

b. Déterminer $\lambda(x)$ en remarquant que $x^2 = (x-1)(x+1) + 1$

c. En déduire toutes les solutions de l'équation (E) .

□ Exercice O17

Résoudre :

Q1 $y'' - 5y' + 6y = 0$

Q2 $y'' - 2y' + y = 0$

Q3 $y'' - 2y' + 2y = 0$

□ Exercice O18

Déterminer une solution particulière y_p sur \mathbb{R} de chacune des équations :

Q1 $y'' - 3y' + 2y = -2e^{3x}$

Q3 $y'' + y' - 2y = 2e^x$

Q2 $4y'' + 4y' + y = 4e^{\frac{-x}{2}}$

Q4 $y'' + y = \sin^3 x$

□ Exercice O19

Q1 Déterminer les solutions de (E) : $y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$.

Q2 Déterminer les solutions de (E) : $y'' - 5y' + 6y = \cos(x) + e^{3t}$.

□ Exercice O20

Soit $(E) : y'' - 2y' + y = x$.

Q1 Résoudre l'équation homogène associée.

Q2 Déterminer deux réels λ et μ tels que $y_p(x) = \lambda x + \mu$ soit une solution de (E) sur \mathbb{R} .

Q3 Déterminer la solution f sur \mathbb{R} qui vérifie $f(0) = 3$ et $f'(0) = 0$.

Une capture d'écran du site XCAS WEB pour donner quelques exemples :

The screenshot shows the XCAS WEB interface with the following elements:

- Top Bar:** Xcas rad 12, x2, Forum, tableau +, -, *, /, %, session, Export, Numworks→, Charger, Parcourir..., Aucun fichier sélectionné.
- Navigation Bar:** Masquer la documentation, Introduction, Partages, Installer, Numworks, Exemples lycée, Exemples, Interface, Clavier, Configuration, Manuels, À propos.
- Category Bar:** Simplifier, Algèbre linéaire, Arithmétique, Résoudre, Analyse, Probabilités, Graphes, Programmation, Tortue, Replier tout.
- Math Panel:** Math, Prog, 123, Doc.
- Main Area:**

Input	Output
<code>f(x):=(x^3+1)/(x-1)</code>	$x \rightarrow \frac{x^3+1}{x-1}$
<code>int(f(x))</code>	$\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2\ln(x-1) + x$
<code>g(x):=cos(2x)*sin(3x)</code>	$x \rightarrow \cos(2x)\sin(3x)$
<code>tlin(g(x))</code>	$\frac{1}{2}\sin(x) + \frac{1}{2}\sin(5x)$
<code>h(x):=(2x+1)^2</code>	$x \rightarrow (2x+1)^2$
<code>expand(h(x))</code>	$4x^2 + 4x + 1$
<code>k(x):=x^2-2</code>	$x \rightarrow x^2 - 2$
<code>factor(k(x))</code>	$x^2 - 2$
<code>factor(k(x),sqrt)</code>	$(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$
<code>tlin(cos(x)^3)</code>	$\frac{3}{4}\cos(x) + \frac{1}{4}\cos(3x)$
- Bottom Bar:** Vars, Exec, +, -, -Corbeille, Restaure, Vide.
- Input Line:** 1
- Bottom Panel:** Ok, x, Cas, Py, JS, ?, ←, →, ↑, ↓, →|, ∞, \n, ↶, ↷, find, =, =, rep, go, sel.