Planche O
Equations différentielles

À noter : pour ce chapitre assez calculatoire, il ne faut pas hésiter à utiliser le logiciel XCAS Web afin de se guider dans les calculs, ou tout simplement de les vérifier… (voir dernière page).

Partie 1 : primitives / intégrales

☐ Exercice O1

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

Q 1 $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{3x^2+1}}$

Q 2 $f(x) = \dfrac{x}{x^2+3}$

Q 3 $f(x) = \dfrac{\cos x}{2\sin(x)-5}$

Q 4 $f(x) = x\mathrm{e}^{x^2-1}$

Q 5 $f(x) = (5x+2)^6$

Q 6 $f(x) = (2x+1)(x^2+x+1)^5$

☐ Exercice O2

Déterminer les primitives des fonctions :

Q 1 $f(x) = \tan x$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$

Q 2 $g(x) = \dfrac{x}{(1+x^2)^2}$ sur $\mathbb{R}$

Q 3 $h(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$

☐ Exercice O3

Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \cos^3(x)$ par 2 méthodes :

Q 1 En linéarisant f

Q 2 En remarquant que $f(x) = (1-\sin^2(x))\cos(x)$

☐ Exercice O4

Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \cos(2x)\sin(3x)$ *(Transformer les produits en somme…On peut contrôler son résultat avec le site `XCAS en ligne` avec la commande `tlin(cos(2x)*sin(3x))`.)*

☐ Exercice O5

Déterminer une primitive de :

Q 1 $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x+1)^2}$ pour $x \in \mathbb{R}^+$

Q 2 $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+\gamma^2}$

Q 3 $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-2x+2}$
(penser à la forme canonique)

Q 4 $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$
(écrire f sous la forme $\dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x-2}$)

Q 5 $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$ pour $x \in \left]-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right[$

☐ Exercice O6

Calculer les primitives :

Q 1 $\displaystyle\int \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$

Q 2 $\displaystyle\int \cos(7x)\cos(9x)\mathrm{d}x$

Q 3 $\displaystyle\int \frac{5}{(3x+1)^3}\mathrm{d}x$

Q 4 $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos(x)+2}}\mathrm{d}x$

Q 5 $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

Q 6 $\displaystyle\int \tan(2x)\,\mathrm{d}x$

□ Exercice O7

Calculer à l'aide des nombres complexes les primitives qui s'annulent en 0 des fonctions suivantes :

Q 1 $f(x) = \mathrm{e}^x \cos x$

Q 2 $f(x) = \mathrm{e}^x \cos^2 x$

□ Exercice O8

Calculer les intégrales suivantes :

Q 1 $I = \displaystyle\int_0^{\pi} |\cos(2x)|\mathrm{d}x$

Q 2 $J = \displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x}\mathrm{d}x$

□ Exercice O9

f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 4 - x^2 \quad \text{et} \quad g(x) = 1 - \frac{1}{4}x^2$$

Q 1 Déterminer les points d'intersection des courbes représentatives de f et g.

Q 2 Déterminer l'aire en $u.a$, du domaine situé entre les deux courbes.

□ Exercice O10

On pose $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{\cos x - \sin x}\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{\cos x - \sin x}\mathrm{d}x$

Q 1 Calculer $I + J$ et $I - J$.

Q 2 En déduire I et J.

□ Exercice O11

Q 1 Quel est l'ensemble des points $M(x, y)$ vérifiant : $x^2 - 4x + y^2 = 0$?

Q 2 Quel est l'ensemble des points $M(x, y)$ vérifiant $y = f(x)$ avec $f(x) = \sqrt{4x - x^2}$, $x \in [0; 4]$?

Q 3 Par des considérations géométrique, déterminer la valeur de $I = \displaystyle\int_0^4 \sqrt{4x - x^2}\mathrm{d}x$.

□ Exercice O12

On considère la fonction $f(x) = \mathrm{e}^{2x+3}$. Déterminer la largeur du rectangle de longueur 2 dont l'aire, en u.a., est égale à $\displaystyle\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

Partie 2 : équations différentielles

☐ Exercice O13

Résoudre les équations différentielles :

Q 1 $y' - 2y = 0$

Q 2 $3y' + 5y = 4$

Q 3 $y' + 3y = 2e^{3t}$

Q 4 $y' + 3ty = 0$

☐ Exercice O14

Q 1 $y' + 2y = 3e^{-t}$

Q 2 $y' + y = te^{-t}$ *(indic: $y_p(t) = P(t)e^{-t}$ avec P polynome de degré 2)*

Q 3 $y' - 2y = \cos(x) + 2\sin(x)$

Q 4 $2y' - 3y = \sin^2 x$ *(On pourra linéariser le second membre)*

Q 5 $y' - 2y = \sin(2t)e^t$

Q 6 $(1 + t^2)y' - ty = \sqrt{1 + t^2}$

☐ Exercice O15

Soit (E) : $y' - \dfrac{y}{x^2} = x - \dfrac{1}{2x}$ à résoudre sur $]0; +\infty[$.

Q 1 Résoudre l'équation homogène associée.

Q 2 Chercher une solution particulière de (E) sous la forme d'un polynôme de degré 2.

Q 3 En déduire la solution f de (E) sur $]0; +\infty[$ vérifiant $f(1) = 0$.

☐ Exercice O16 (Variation de la constante)

On souhaite résoudre sur $I =]1; +\infty[$ l'équation : $(E) \quad y' + \dfrac{1}{x}y = \dfrac{x}{x-1}$.

Q 1 Déterminer les solutions f_h de l'équation homogène associée.

Q 2 On note $f_0(x) = \dfrac{1}{x}$ une des solutions de l'équation homogène.
On va chercher une solution particulière de (E) sous la forme : $f_p(x) = \lambda(x)f_0(x)$.

a. Remplacer f_p dans l'équation (E) pour en déduire que f_p est solution de (E) si et seulement si $\lambda'(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$.

b. Déterminer $\lambda(x)$ en remarquant que $x^2 = (x-1)(x+1) + 1$

c. En déduire toutes les solutions de l'équation (E).

☐ Exercice O17

Résoudre :

Q 1 $y'' - 5y' + 6y = 0$

Q 2 $y'' - 2y' + y = 0$

Q 3 $y'' - 2y' + 2y = 0$

☐ Exercice O18

Déterminer une solution particulière y_p sur $\mathbb{R}$ de chacune des équations :

Q 1 $y'' - 3y' + 2y = -2e^{3x}$

Q 2 $4y'' + 4y' + y = 4e^{\frac{-x}{2}}$

Q 3 $y'' + y' - 2y = 2e^x$

Q 4 $y'' + y = \sin^3 x$

☐ Exercice O19

Q 1 Déterminer les solutions de (E) : $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{2}(e^t + e^{-t})$.

Q 2 Déterminer les solutions de (E) : $y'' - 5y' + 6y = \cos(x) + e^{3t}$.

☐ Exercice O20

Soit $(E) : y'' - 2y' + y = x$.

Q 1 Résoudre l'équation homogène associée.

Q 2 Déterminer deux réels λ et μ tels que $y_p(x) = \lambda x + \mu$ soit une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Q 3 Déterminer la solution f sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $f(0) = 3$ et $f'(0) = 0$.

Une capture d'écran du site XCAS WEB pour donner quelques exemples :