Planche N
Ensembles/Applications

□ Exercice N1 (Rappels sur quantificateurs)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I à valeurs réelles.

Q 1 la fonction f s'annule

Q 2 la fonction f est la fonction nulle

Q 3 f n'est pas une fonction constante

Q 4 f ne prend jamais deux fois la même valeur

Q 5 la fonction f présente un minimum

Q 6 f prend des valeurs arbitrairement grandes.

□ Exercice N2 (Opérations sur les ensembles)

Soit E un ensemble. Considérons A, B et C des sous-ensembles de E.
Montrer chacune des propositions suivantes :

Q 1 $A \cap B = A \cup B \iff A = B$.

Q 2 $(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$

Q 3 $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$

Q 4 $\{y \in \mathbb{R} / \exists x \in [-1; 2], y = x^2\} = [0; 4]$

□ Exercice N3 (Parties d'un ensemble)

Déterminer $\mathcal{P}(E)$ lorsque $E = \{1, 2, 3\}$.

□ Exercice N4 (Produit cartésien)

On note E l'ensemble des solutions de l'équation $t^2 \leqslant 4$ et F l'ensemble des solutions de l'équation $t^2 \geqslant 1$. Dessiner dans un repère orthonormé l'ensemble $E \times F$.

□ Exercice N5 (Antécédents)

Q 1 On considère l'application $D : f \in E \mapsto f' \in E$ où E est l'ensemble des fonctions infiniment dérivables. Déterminer les antécédents éventuels par D de $g : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$

Q 2 On considère l'application $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (x + y - z\ ,\ x - 2y + z) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer les antécédents éventuels de $Y = (1, 2)$ par f.

□ Exercice N6 (Images, images réciproques)

On considère l'application carrée f définie sur $\mathbb{R}$. Déterminer les ensembles suivants :

Q 1 $f([-2; 2])$, $f([-1; 2])$.

Q 2 $f^{-1}([0; 4])$, $f^{-1}([-2; 4])$, $f^{-1}([-2; -1])$.

□ Exercice N7 (Images réciproques)

Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x^2 - y^2 \end{array}$. Représenter graphiquement les ensembles $\varphi^{-1}(\{0\})$ et $\varphi^{-1}(\mathbb{R}^+)$.

☐ Exercice N8 (Propriété des images directes)

Soit $f : E \longrightarrow F$. Prenons $A \subset E$ et $A' \subset E$. Montrer que :

Q 1 $A \subset A' \implies f(A) \subset f(A')$

Q 2 $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$

Q 3 **a.** $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$ *(Be careful, this result is not so natural !)*

b. Utiliser la fonction carrée pour exhiber deux sous-ensembles A et A' tels que $f(A \cap A') \neq f(A) \cap f(A')$

☐ Exercice N9 (Propriétés des images réciproques)

Soit $f : E \longrightarrow F$, B et B' deux parties de F. Montrer que :

Q 1 $B \subset B' \implies f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$

Q 2 $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$

Q 3 $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$

Q 4 $f^{-1}(\overline{B}) = \overline{f^{-1}(B)}$

☐ Exercice N10 (Injectivité)

Soit A une partie de E, strictement incluse dans E. L'application f_A suivante est elle injective ?

$$f_A : X \in \mathcal{P}(E) \mapsto X \cap A \in \mathcal{P}(E)$$

☐ Exercice N11 (Surjectivité)

Soit A une partie de E. On considère l'application

$$f_A : X \in \mathcal{P}(E) \mapsto X \cap A \in \mathcal{P}(E)$$

Montrer que f_A est surjective si et seulement si $A = E$.

☐ Exercice N12

Écrire des caractérisations pour f injective, f surjective et f bijective à l'aide de l'ensemble $f^{-1}(\{y\})$.

☐ Exercice N13

Soit $F : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (p, q) & \longmapsto & \dfrac{p}{q} \end{array}$. F est-elle injective ? Surjective ?

Quels sont les antécédents de 0 et de 1 ? Que vaut $F(\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*)$?

☐ Exercice N14

On considère les applications f et g de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = 2n \text{ et } \begin{cases} g(n) = \frac{n}{2} \text{ si } n \text{ est pair} \\ g(n) = \frac{n-1}{2} \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Étudier l'injectivité et la surjectivité de f et g, puis déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$.

☐ Exercice N15

Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow H$ deux applications.

Q 1 Montrer que si $g \circ f$ est injective et f surjective, alors g est injective.

Q 2 Montrer que si $g \circ f$ est surjective et g injective, alors f est surjective.

□ Exercice N16

Soit $f : E \longrightarrow E$ vérifiant $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f injective $\iff$ f surjective.

□ Exercice N17 (bijectivité)

Considérons l'application $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x + 2y, 2x + 3y) \end{array}$

Pour un couple quelconque (X, Y) donné, en résolvant le système $h(x, y) = (X, Y)$, d'inconnue (x, y), montrer que h est bijective et exprimer h^{-1}.

□ Exercice N18

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

Q 1 Soit $A \subset E$. Comparer A et $f^{-1}(f(A))$, puis montrer que si f est injective alors $A = f^{-1}(f(A))$.

Q 2 Réciproquement, montrer que si $\forall A \in \mathcal{P}(E), A = f^{-1}(f(A))$ alors f est injective.

Q 3 Soit $B \subset F$. Comparer B et $f(f^{-1}(B))$, puis montrer que si f est surjective alors $B = f(f^{-1}(B))$.

Q 4 Réciproquement, montrer que si $\forall B \in \mathcal{P}(F), B = f(f^{-1}(B))$ alors f est surjective.

Faire les 2 exercices suivants après le chapitre sur la résolution de système...

□ Exercice N19

Q 1 Montrer que $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (x + y, y - x, 2x + y) \end{array}$ est injective.

Q 2 Quelle est l'image $f(\mathcal{D})$ de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x + y = 1$?

□ Exercice N20

Q 1 Montrer que $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (2x + y - z, 3x + 2y + 5z) \end{array}$ est surjective.

Q 2 Quelle est l'image $g(\mathcal{P})$ du plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + y + 6z = 1$?