Planche M
Complexes

□ Exercice M1 (Forme algébrique)

Soit f la fonction qui à tout nombre complexe $z \neq i$ associe le nombre complexe : $f(z) = \dfrac{2iz-1}{z-1}$

Écrire sous forme algébrique : $f(3)$; $f\left(\dfrac{1}{2}i\right)$; $f\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)$.

□ Exercice M2 (Égalité de deux complexes)

Dans chaque cas, déterminer s'il existe des nombres réels a pour lesquels $z = z'$:

a. $z = a + i$ et $z' = \dfrac{2+4i}{1-i}$ **b.** $z = (a^2 + a - 1) + ai$ et $z' = 1 - i$

□ Exercice M3 (Forme algébrique)

Soit λ un réel et $z = \frac{\lambda(1+i)-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i\lambda}$. Déterminer les éventuels nombres **réels** λ tels que :

a. $z = \lambda$ **b.** $z \in i\mathbb{R}$ **c.** $z \in \mathbb{R}$

□ Exercice M4 (Modules et conjugués)

Q 1 Déterminer les éventuels nombres **réels** λ tels que $\left|\frac{\lambda(1+i)-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i\lambda}\right| = 1$

Q 2 Soit z et z' deux complexes de module 1 tels que $zz' \neq -1$. Montrer que $\dfrac{z+z'}{1+zz'} \in \mathbb{R}$.

Q 3 Soit a et b des complexes non nuls. Montrer l'implication : $|a| = |b| \implies \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \in \mathbb{R}$.
Montrer que la réciproque est fausse.

□ Exercice M5 (Ensembles de points dans le plan)

Avec peu de calculs, déterminer les sous-ensembles du plan complexe $\mathcal{P}$:

Q 1 $\mathcal{E}_1 = \{M(z) \in \mathcal{P} \ / \ |z-1| = |z-i|\}$

Q 2 $\mathcal{E}_2 = \{M(z) \in \mathcal{P} \ / \ |-2iz + 1 - 4i| = 4\}$

Q 3 $\mathcal{E}_3 = \{M(z) \in \mathcal{P} \ / \ |z - 2 + i| = |\bar{z} + 3i|\}$

Q 4 $\mathcal{E}_4 = \{M(z) \in \mathcal{P} \ / \ 5i\bar{z} + 2i \in \mathbb{R}\}$

□ Exercice M6 (Ensembles de points dans le plan)

Soit $f(z) = \dfrac{z+1}{z-2}$. Décrire, dans le plan complexe, les ensembles suivants :

Q 1 $\mathcal{E} = \{M(z) \in \mathcal{P} \ / \ |f(z)| = 1\}$

Q 2 $\mathcal{F} = \{M(z) \in \mathcal{P} \ / \ |f(z)| \leqslant 1\}$

Q 3 $\mathcal{G} = \{M(z) \in \mathcal{P} \ / \ f(z) \in \mathbb{R}\}$

Q 4 $\mathcal{H} = \{M(z) \in \mathcal{P} \ / \ f(z) \in i\mathbb{R}\}$

□ Exercice M7 (Formules sur les modules)

Q 1 Montrer que $|z + z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2Re(\bar{z}z')$

Q 2 Si on note z l'affixe de $\vec{u}$ et z' l'affixe de $\vec{v}$, montrer que : $\vec{u} \cdot \vec{v} = Re(\bar{z}z')$

Q 3 Montrer que $|z| = 1 \iff \dfrac{1}{z} = \bar{z}$

□ Exercice M8 (Moivre : transformation de cos(nx) et sin(nx))

Exprimer $\cos 5x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$, puis uniquement en fonction de $\cos x$.
(Rappel : $\cos 5x = Re(e^{i5x})$*)*

□ Exercice M9 (Moivre : transformation de cos(nx) et sin(nx))

Q 1 Exprimer $\cos 6x$ en fonction de $\cos x$.

Q 2 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\cos nx = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^p \binom{n}{2p} \cos^{n-2p} x \sin^{2p} x$$

Q 3 Monter par l'absurde qu'il n'existe pas de fonction f de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$, telle que $\sin 6x = f(\sin x)$.
(Indic : chercher deux réels a et b tels que $\sin a = \sin b$ *mais* $\sin 6a \neq \sin 6b$*...)*

□ Exercice M10 (Linéarisation de cos/sin)

Q 1 Appliquer la formule d'Euler pour linéariser $\sin^6 \theta$, c'est à dire exprimer $\sin^6 \theta$ en fonction de $\cos n\theta$ et/ou $\sin n\theta$.

Q 2 Linéariser $\cos^5 \theta$.

□ Exercice M11 (Euler, arc moyen)

Q 1 Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a :

$$\boxed{e^{2i\theta} + 1 = 2e^{i\theta} \cos \theta} \quad \text{et} \quad \boxed{e^{2i\theta} - 1 = 2ie^{i\theta} \sin \theta}$$

Q 2 Donner une forme *simple* de $Re\left(1 + e^{2i\theta}\right)$

□ Exercice M12 (Euler, arc moyen)

Soit θ_1 et θ_2 deux réels, et $n \in \mathbb{N}$. Notons $z = e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2}$. En utilisant la technique de l'arc moitié, donner une expression simplifiée de $Re(z^n)$.

□ Exercice M13 (Factorisation)

Q 1 En utilisant la formule d'Euler et l'arc moitié, retrouver la formule permettant d'obtenir la factorisation : $\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$.

Q 2 Pour s'entraîner, retrouver également $\cos p - \cos q$, $\sin p + \sin q$ et $\sin p - \sin q$.

□ Exercice M14 (Euler)

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in]0; 2\pi[$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} \cos k\theta$.

Donner le lien entre S_n et $\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}$, puis en déduire que $S_n = \dfrac{\cos \frac{n\theta}{2} \sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}$.

□ Exercice M15 (Forme exponentielle)

Calculer pour tout $n \geqslant 1$, la somme $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \cos\left(k\frac{\pi}{3}\right)$
(Indic : S_n est la partie réelle d'une somme de complexes...)

□ Exercice M16 (Forme exponentielle)

Soit le polynôme $P(x) = x^3 - 3x + 1$.

Q 1 Sait-on calculer les « racines de P », c'est-à-dire les solutions de l'équation $P(x) = 0$?

Q 2 Prouver (ou justifier qualitativement) que l'équation $P(x) = 0$ admet exactement trois solutions réelles.

Q 3 Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Simplifier l'expression $P(\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta})$, puis en déduire les valeurs de θ pour lesquelles $P(\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}) = 0$.

Q 4 Conclure sur les 3 racines de P.

□ Exercice M17

Donner le lieu géométrique des points $M(z)$ tels que :

a. $\mathcal{E}_1$: $\arg(z) = \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$ **b.** $\mathcal{E}_2$: $\arg(z) = \dfrac{2\pi}{3}\ [\pi]$ **c.** $\mathcal{E}_3$: $\arg(z - i) = \dfrac{-\pi}{4}\ [2\pi]$

□ Exercice M18 (Forme algébrique <-> forme trigo)

Q 1 Donner la forme algébrique de : $z_1 = 3\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$, $z_2 = 3\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}$, $z_3 = 2\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}$, $z_4 = 5\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{6}}$

Q 2 Donner la forme trigo/exponentielle des complexes suivants :

a. $2i$ **b.** $(-2 + 2i)(-\sqrt{3} + 3i)$ **c.** $\dfrac{\sqrt{3} - i}{-2 + 2i}$ **d.** $\dfrac{-\sqrt{3} + 3i}{-1 + i\sqrt{3}}$ **e.** $(\sqrt{3} - i)^8$ **f.** $-2 - 3i$

□ Exercice M19 (Forme exponentielle)

Q 1 Donner la forme algébrique de $z = (1 + i)^{2025}$

Q 2 Pour quelles valeurs de n, le complexe $\left(\dfrac{(1 - i\sqrt{3})^5}{(1 - i)^3}\right)^n$ est-il un réel positif ?

□ Exercice M20 (Exponentielle complexe)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a. $\mathrm{e}^z = -1$ **b.** $\mathrm{e}^z = -i$ **c.** $\mathrm{e}^z - 1 + i = 0$

□ Exercice M21 (Trouver les racines carrées d'un complexe)

On veut résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 = -15 + 8i$.

Q 1 Trouver la forme exponentielle des solutions de (E).

Q 2 On propose de poser $z = x + iy$. Trouver un système vérifié par x et y.

Q 3 Conclure sur les solutions de (E) (*on pourra calculer également* $x^2 + y^2$).

□ Exercice M22

Par la méthode de votre choix, déterminer les racines carrées de

a. $z_1 = -6 + 8i$ **b.** $z_2 = i$ **c.** $z_3 = 4\dfrac{-1 + i}{-1 + i\sqrt{3}}$

□ Exercice M23 (Résoudre une équation dans $\mathbb{C}$)

Résoudre dans $\mathbb{C}$: (E_1) $z^2 + (1 - i)z - i = 0$ (E_2) $z^2 = \bar{z}$ (E_3) $z + 2 = \dfrac{i}{z}$

☐ Exercice M24 (Équations, racines n-ièmes)

Q 1 Résoudre dans $\mathbb{C}$: (E_1) $z^3 = -2i$ (E_2) $z^{2n} + iz^n + 2 = 0$ (E_3) $(z+1)^n = (z-1)^n$

Q 2 Déterminer les racines cubiques de $\omega = 4\dfrac{-1+i}{-1+i\sqrt{3}}$.

☐ Exercice M25 (Racines n-ièmes)

En utilisant l'exponentielle complexe, montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = 0$.

☐ Exercice M26

Si x est un réel, on définit $f : x \mapsto \dfrac{ix+1}{ix-1}$.

Q 1 Déterminer l'ensemble de définition $I \subset \mathbb{R}$.

Q 2 Justifier que $f(I) \subset \mathbb{U}$ (où $\mathbb{U}$ est l'ensemble des complexes de module 1).

Q 3 Prouver que f réalise une bijection de I sur un ensemble J à déterminer.

Q 4 Déterminer un argument de $ix-1$ et $ix+1$. En déduire que $f : x \mapsto -\mathrm{e}^{2i \arctan x}$.

Q 5 À l'aide de la forme algébrique de f, donner une forme simplifiée de $\cos(2\arctan x)$ et $\sin(2\arctan x)$.

Q 6 Grâce à f, justifier que, pour tout $x \in]-1, 1[$, $\arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) = 2\arctan x$.

☐ Exercice M27

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ du plan tels que les points d'affixes z , z^2 et $\dfrac{1}{z}$ sont alignés.