CHAPITRE

$\mathscr{M}$

$\sqrt{\text{MATH}}$

TSI[1]

Lycée Artaud

2025/2026

Nombres complexes

Sommaire

Voir l'activité d'introduction aux nombres complexes via la résolution d'équations de 3e degré...

I Forme algébrique

I.1 L'ensemble des nombres complexes

Propriété I.1.1 (admise)

Il existe un ensemble, noté $\mathbb{C}$:

- contenant $\mathbb{R}$,
- muni d'une addition et d'une multiplication généralisant celles de $\mathbb{R}$,
- contenant un nombre i vérifiant $\boxed{i^2 = -1}$,
- et dont tous les éléments z s'écrivent de manière *unique* sous la forme $z = a + ib$, avec a et b réels (**forme algébrique**).

Vocabulaire : a est appelé « *partie réelle* » et noté $Re(z)$, b est appelé « *partie imaginaire* » et noté $Im(z)$.

Exemple (I.1.2)

Soit $z_1 = 3 + 2i$ et $z_2 = 2 - i$. Donner la forme algébrique des nombres $z_3 = z_1 + z_2$ et $z_4 = z_1 \times z_2$.

S1

REMARQUES – Tout nombre complexe non nul $z = a + ib$ admet un inverse $z^{-1} = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{a + ib}$.
Pour obtenir sa forme algébrique, on multiplie numérateur et dénominateur par $a - ib$ (**À retenir**).

Exemple (I.1.3)

Donner la forme algébrique des nombres $z_1 = \dfrac{5 + i}{3 + 2i}$ et $z_2 = \dfrac{1}{2i}$ et $z_3 = \dfrac{1}{3 - 2i}$:

S2

Propriété I.1.4 (admise)

- $z = z' \iff$ Re(z)=Re(z') et Im(z)=Im(z').
- Les fonctions « partie réelle », « partie imaginaire » sont $\mathbb{R}$-linéaires, c'est-à-dire que, pour tout z, z' dans $\mathbb{C}$, et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$Re(z + \lambda z') = Re(z) + \lambda Re(z') \quad \text{et} \quad Im(z + \lambda z') = Im(z) + \lambda Im(z')$$

Attention ! – $Re(zz') \neq Re(z)Re(z')$ et $Im(zz') \neq Im(z)Im(z')$. Voir par exemple avec $z' = i$...

☐ ✍ **Exercice M.1** ☐ ✍ **Exercice M.2** ☐ ✍ **Exercice M.3**

I.2 Plan complexe

Identification du plan complexe et du plan euclidien :
L'application $\varphi : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x + iy \in \mathbb{C}$ est bijective. Elle est aussi $\mathbb{R}$-linéaire. On dit que $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$ sont *isomorphes*. Mais $\mathbb{R}^2$ étant isomorphe au plan usuel euclidien, on en déduit que $\mathbb{C}$ est isomorphe au plan usuel.

♪ Définition I.2.1 (plan complexe)

On appelle **plan complexe** le plan usuel $\mathscr{P}$ dans lequel tout point $M(x, y)$ est associé au complexe $z_M = x + iy$, appelé *affixe de* M.

Souvent, par abus de langage, on parlera du « point z ». Cette identification doit rester en mémoire tout au long du chapitre, et toute opération algébrique doit autant que possible être visualisée géométriquement et réciproquement...

Exemple (I.2.2)

- Quel est l'ensemble $\mathscr{E}_1$ des points $M(z)$ du plan complexe tels que $2z + 1$ soit réel ?

S3

- Quel est l'ensemble $\mathscr{E}_2$ des points $M(z)$ du plan complexe tels que $3z + i$ soit imaginaire pur ?

S4

REMARQUES –

- Si l'on prend z et z' deux « points » du plan complexe. Pouvez-vous visualiser facilement où se situe le « point » $z + z'$? Et pour $z \times z'$?

- **On retiendra que la forme algébrique d'un nombre complexe est bien adaptée pour gérer les calculs de type addition/soustraction, mais peu pour les multiplications/divisions.**

I.3 Conjugué et formules d'Euler

Définition I.3.1 (Conjugué)

On appelle **conjugué de** z le complexe $\bar{z} = Re(z) - i \times Im(z)$.

REMARQUES – Soit z un nombre complexe. Représenter dans le plan complexe les nombres z, $\bar{z}$, $-z$ et $-\bar{z}$:

S5

Propriété I.3.2

Pour tout z, z' dans $\mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

- $\overline{z + \lambda z'} = \overline{z} + \lambda \overline{z'}$ $(\mathbb{R} - \text{linéarité})$
- $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$ et $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\overline{z'}}{\overline{z}}$

Propriété I.3.3 (Formules d'Euler)

On retiendra les expressions suivantes :

$$\frac{z + \overline{z}}{2} = \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{et} \quad \frac{z - \overline{z}}{2i} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

REMARQUES – On peut lire ces formules ainsi : $\boxed{z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z} \text{ et } z \in i\mathbb{R} \iff z = -\bar{z}}$.

On travaillera ces formules un peu plus loin avec la forme exponentielle...

I.4 Module

Définition I.4.1 (Module)

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. On appelle module de z le réel positif : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

REMARQUES – Le module généralise la valeur absolue des nombres réels.

Propriété I.4.2 (calcul pratique)

On a : $\boxed{|z|^2 = z\bar{z}}$.

Propriété I.4.3 (Interprétations géométriques du module)

- Si M un point du plan, alors $|z_M| = OM$. Si A et B sont deux points alors $\boxed{|z_A - z_B| = AB}$.
- Si $\vec{u}(x,y)$ est un vecteur, on appelle *affixe de $\vec{u}$* le réel $z_{\vec{u}} = x + iy$. Alors $|z_{\vec{u}}| = \sqrt{x^2+y^2} = \|\vec{u}\|$.

Exemple (I.4.4)

Si $A(a)$ est un point du plan, et r un réel. Quel est l'ensemble $\mathscr{E}_1$ d'équation $|z-a| = r$? $\mathscr{E}_2$ d'équation $|z-a| < r$? et $\mathscr{E}_3$ d'équation $|z-a| \leqslant r$?

S6

Propriété I.4.5

- $\forall z, z' \in \mathbb{C}$, $|\bar{z}| = |z|$ et $|zz'| = |z||z'|$ et $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$.
- Le module **n'est pas** $\mathbb{R}$-linéaire et on a l'inégalité triangulaire : $|z+z'| \leqslant |z| + |z'|$.
  Si $z' \neq 0$, il y a égalité si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $z = \lambda z'$.

Preuve

Indication :

- *Étape 1 : montrer que pour tout $k \in \mathbb{C}$, $(1+|k|)^2 \geqslant |1+k|^2$.*
- *Étape 2 : traiter le cas $z = 0$, puis poser $k = \frac{z'}{z}$ pour se ramener à l'étape 1*

S7

$\square$

REMARQUES – Visualiser l'inégalité triangulaire dans le plan :

S8

Mettons en évidence quelques propriétés supplémentaires :

Propriété I.4.6

- $|z+z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2Re(\bar{z}z')$
- $|z-z'|^2 =$ ....
- Si on note z l'affixe de $\vec{u}$ et z' l'affixe de $\vec{v}$, alors : $\vec{u}\cdot\vec{v} = Re(\bar{z}z')$ *et* $\det(\vec{u},\vec{v}) = Im(\bar{z}z')$
- $|z| = 1 \iff \dfrac{1}{z} = \bar{z}$
- $|z-z'| \geqslant \big||z|-|z'|\big|$ (2e inégalité triangulaire)

Preuve

Voir planche exercices □

Exemple (I.4.7)

Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que $z + \dfrac{1}{z+1}$ soit réel.

S9

□ ✍ **Exercice M.4** □ ✍ **Exercice M.5** □ ✍ **Exercice M.6** □ ✍ **Exercice M.7**

II Forme trigonométrique, forme exponentielle

II.1 Cercle trigonométrique

♪ Définition II.1.1 (Cercle trigonométrique)

Le cercle trigonométrique, noté $\mathbb{U}$ est l'ensemble des nombres complexes de module 1 :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\} = \{\cos\theta + i\sin\theta,\ \theta \in \mathbb{R}\}$$

Propriété II.1.2

Le produit et l'inverse de deux éléments de $\mathbb{U}$ est dans $\mathbb{U}$.

Preuve

On utilise les propriétés sur module et produit... □

II.2 Notation $e^{i\theta}$

Quelques "bidouilles pour expliquer la suite" : soit $f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$. Dériver cette fonction et résoudre *formellement* l'équation différentielle obtenue :

S11

♪ Définition II.2.1 (exponentielle)

Pour tout réel θ on note $e^{i\theta}$ le nombre $\cos\theta + i\sin\theta$.

Remarques – Lorsque $\theta = 0$ on retrouve le fait que $e^0 = 1$ ce qui coincide avec la notation exponentielle usuelle.

Propriété II.2.2

- Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $|e^{i\theta}| = 1$ et $e^{i\theta} \in \mathbb{U}$.
- Pour tout $z \in \mathbb{U}$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$.
- Si $e^{i\theta} = e^{i\varphi}$ alors $\theta \equiv \varphi [2\pi]$.
- $e^{i\theta}e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)}$
- $e^{-i\theta} = \dfrac{1}{e^{i\theta}}$
- $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\varphi}} = e^{i(\theta-\varphi)}$

Remarques – Peu de choses à dire sur les preuves, si ce n'est pour la quatrième qui découle directement des formules d'additions vues en trigonométrie... En pratique, on se sert même souvent de cette égalité pour retrouver les formules d'addition de trigonométrie que l'on aurait oubliées !

S12

Remarques –

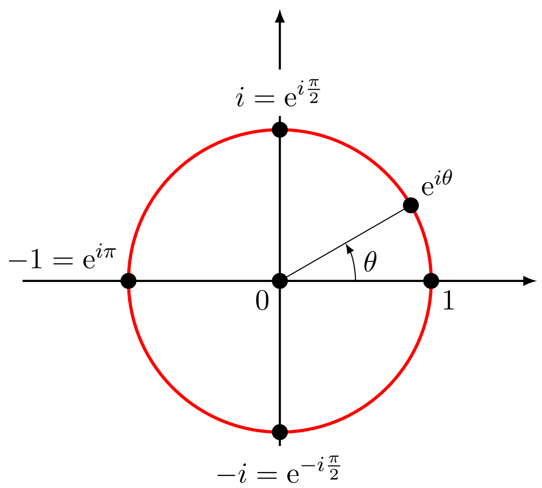
- Que valent $\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}$, $\mathrm{e}^{i\pi}$, $\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}$?

S13

- Si $z = \mathrm{e}^{i\theta}$ où se situent géométriquement les points $\mathrm{e}^{-i\theta}$ et $\mathrm{e}^{i(\theta+\pi)}$?

S14

- Essayer de voir où se situe le produit $z \times z'$ lorsque $z = \mathrm{e}^{i\theta}$ et $z' = \mathrm{e}^{i\theta'}$.
On retiendra que la notation $\mathrm{e}^{i\theta}$ est bien adaptée pour travailler avec des produits...



II.3 Formule de Moivre

Propriété II.3.1 (Moivre)

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$ on a : $\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{in\theta}$, soit encore :

. . . .

Preuve

Une petite récurrence sur n donne le résultat pour les n positifs, et le passage à l'inverse permet de conclure les autres cas... □

Une application classique de la formule de Moivre est la transformation de $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ en fonction de puissances de $\cos x$ et $\sin x$.

□ ✍ **Exercice M.8** □ ✍ **Exercice M.9**

II.4 Formules d'Euler

Si l'on applique les formules d'Euler vues à la propriété I.3.3 à des nombres complexes de $\mathbb{U}$, on obtient :

$$\cos\theta = \ldots\ldots\ldots \quad \text{et} \quad \sin\theta = \ldots\ldots\ldots$$

□ ✍ **Exercice M.10** □ ✍ **Exercice M.11** □ ✍ **Exercice M.12** □ ✍ **Exercice M.13**
□ ✍ **Exercice M.14**

II.5 Forme trigonométrique / forme exponentielle

Propriété II.5.1 (et définition)

Tout nombre complexe $z \neq 0$ peut se mettre sous la forme $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$, avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$:

- $r = |z|$ est **le** *module* de z,
- $\theta = \arg(z)$ est **un** *argument* de z,
- l'écriture $|z|\mathrm{e}^{i\arg(z)}$ est appelée *forme exponentielle* de z,
- l'écriture $|z|\left(\cos(\arg(z)) + i\sin(\arg(z))\right)$ est appelée *forme trigonométrique* de z.

Preuve

Il suffit d'introduire $Z = \dfrac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$... □

Représentation géométrique du module et de l'argument :

S15

Propriété II.5.2 (égalité)

$$z = z' \iff |z| = |z'| \text{ et } \arg(z) \equiv \arg(z') \ [2\pi] \qquad \text{(Attention !)}$$

Propriété II.5.3 (argument et produit)

Pour tous z et z' dans $\mathbb{C}^*$ on a :

$$\arg(zz') \equiv \arg z + \arg z' \ [2\pi] \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg z - \arg z' \ [2\pi] \quad \text{et} \quad \arg\left(z^n\right) \equiv n \arg z \ [2\pi]$$

Preuve

Cela découle des propriétés vues sur l'exponentielle... □

Propriété II.5.4 (Interprétation géométrique de l'argument)

Dans le plan complexe repéré par $(0\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère trois points A, B et C d'affixes respectives z_A, z_B et z_C. Alors en confondant **angle** et **mesure** on peut écrire :

a. $\arg(z_A) = \left(\widehat{\vec{u}\,,\overrightarrow{OA}}\right)$ **b.** $\arg(z_B - z_A) = \left(\widehat{\vec{u}\,,\overrightarrow{AB}}\right)$ **c.** $\arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)$

En effet, on a : $\arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \arg(z_C - z_A) - \arg(z_B - z_A) = \left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AC}}\right) - \left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right)$

Représenter cette propriété par un dessin :

S16

☐ ✍ **Exercice M.15** ☐ ✍ **Exercice M.16** ☐ ✍ **Exercice M.17**

II.6 Lien entre forme algébrique et forme exponentielle

Propriété II.6.1

Soit $z = x + iy$ un complexe non nul, sous forme algébrique. Alors, un argument de z est donné par :

- si $x > 0$, $\quad \theta = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$ (car alors $\theta \in]-\pi/2\,;\pi/2[$).
- si $x < 0$, $\quad \theta = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) + \pi$ (Attention !)
- si $x = 0$ et $y > 0$, $\quad \theta = \frac{\pi}{2}$
- si $x = 0$ et $y < 0$, $\quad \theta = -\frac{\pi}{2}$

Ces formules sont équivalentes à celles déjà rencontrées : $\cos\theta = \dfrac{\text{Re } z}{|z|}$ et $\sin\theta = \dfrac{\text{Im } z}{|z|}$.

☐ ✍ **Exercice M.18** ☐ ✍ **Exercice M.19**

II.7 Exponentielle complexe

♪ Définition II.7.1

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on appelle e^z, ou encore $\exp(z)$, le nombre complexe :

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{Re(z)+iIm(z)} = \mathrm{e}^{Re(z)}\mathrm{e}^{iIm(z)}$$

Exemple (II.7.2)

Compléter les phrases suivantes :

- Pour $(z, z') \in \mathbb{C}$, on a : $\mathrm{e}^{z+z'} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- Pour $z \in \mathbb{C}$ on a : $(\mathrm{e}^{z})^{-1} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Propriété II.7.3 (Égalité)

Attention : $\boxed{\mathrm{e}^{z} = \mathrm{e}^{z'} \iff \begin{cases} Re(z) = Re(z') \\ Im(z) = Im(z') + 2k\pi \end{cases} \iff z = z' + 2ik\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}}$.

Preuve

S17

Exercice M.20

III Équation du second degré

Remarques – Par rapport à la terminale, ici les coefficients ne sont pas nécessairement réels.

III.1 Racine carrée d'un complexe

Définition III.1.1 (racine carrée)

On appelle **racine carrée** de z tout Z tel que $Z^2 = z$.

Propriété III.1.2

Tout nombre complexe non nul admet exactement deux racines carrées opposées :
Si $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$, alors les racines carrées de z sont : $Z = \pm\sqrt{r}\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}$.

Preuve

On utilise la forme exponentielle

S18

□

Exemple (III.1.3)

Donner les racines carrées de $z = 1 + i$.

S19

Point méthode : on retiendra deux méthodes pour chercher des racines carrées.

Voyons ces méthodes sur un exemple :

Exemple (III.1.4)

Donner les racines carrées de $z = -15 + 8i$:

Méthode 1 : avec la forme exponentielle

S20

Méthode 2 : avec la forme algébrique

S21

□ ✍ **Exercice M.21** □ ✍ **Exercice M.22**

III.2 Solutions de $az^2 + bz + c = 0$

Propriété III.2.1

Soit $a \in \mathbb{C}^*$, b et c dans $\mathbb{C}$. On considère léquation :

$$az^2 + bz + c = 0 \qquad (E)$$

En notant $\Delta = b^2 - 4ac$ son dicriminant on a :

- Si $\Delta \neq 0$, en notant δ une racine carrée (quelconque) de Δ, l'équation (E) admet exactement deux solutions distinctes :

$$z_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{et} \quad z_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

- SI $\Delta = 0$, l'équation (E) admet une racine double :

$$z_0 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Preuve

On passe par la forme canonique et un utilse les racines carrées complexes. . . □

Exemple (III.2.2)

Un classique : résoudre $z^2 - 2z\cos\theta + 1 = 0$

S22

Propriété III.2.3 (relation entre coefficients et racines)

Soit a, b et c trois complexes avec $a \neq 0$. On a :

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \text{ et } z_1 z_2 = \frac{c}{a} \iff z_1 \text{ et } z_2 \text{ racines de } az^2 + bz + c$$

Preuve

- $\Longleftarrow$ on utilise les formules précédentes. . .
- $\Longrightarrow$ on développe $a(z - z_1)(z - z_2)$. . .

□

□ ✍ **Exercice M.23**

IV Racines n-ième d'un complexe

IV.1 Racines n-ième de l'unité

Définition IV.1.1 (Racines n-ieme de 1)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle racine n-ième de 1, tout complexe z tel que $z^n = 1$.
L'ensemble des racines n-ièmes est noté $\mathbb{U}_n$.

Exemple (IV.1.2)

Étudier les cas $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ et $n = 4$.

S23

Propriété IV.1.3

Il existe exactement n racines n-ièmes de l'unité : $\boxed{\omega_k = \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}, \quad \forall k \in [\![0, n-1]\!]}$

Remarques –

- En posant $\xi = \omega_1 = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{n}}$, on a pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$: $\omega_k = \xi^k$.
- En math on a l'habitude de noter une des racines cubique de l'unité par la lettre j : $\boxed{j = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}}$.

Propriété IV.1.4

Pour tout $n > 1$, la somme des racines n-ièmes de l'unité est nulle : $\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = 0}$

Preuve

Idée : repérer une somme géométrique...

S24

□

Olivier BRÉBANT
Lycée Artaud – 2025/2026

Exemple (IV.1.5)

Avec les racines cubiques de l'unité, cela donne en notant $j = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$: $\boxed{1 + j + j^2 = 0}$.

IV.2 Racines n-ième d'un complexe

♪ Définition IV.2.1

Pour tout $a \in \mathbb{C}$, les racines n-ième de a sont les solutions de l'équations $z^n = a$.

Propriété IV.2.2

Si $a \neq 0$ et si z_0 est une racine n-ième de a, alors l'ensemble des racines n-ième de a est :

$$\{z_0\omega,\ \omega \in \mathbb{U}_n\}$$

Preuve

S25

☐

Remarques –

- $z_0 = |a|^{\frac{1}{n}} \mathrm{e}^{i\left(\frac{\arg(a)}{n}\right)}$ est une racine n-ième de a. Donc l'ensemble des racines n-ièmes de a s'écrit aussi : $\left\{|a|^{\frac{1}{n}} \mathrm{e}^{i\left(\frac{\arg(a)}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)},\ k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$.
- Si $a \neq 0$, alors a possède exactement n racines n-ième.

☐ ✍ **Exercice M.24** ☐ ✍ **Exercice M.25**

Deux exos pour finir : ☐ ✍ **Exercice M.26** ☐ ✍ **Exercice M.27**