Planche L
Sommes

☐ Exercice L1

On considère la fonction python suivante :

```python
def somme(n):
    S = 0
    for k in range(1, n + 1):
        S = S + 2*k
    return S
```

Q 1 Que calcule cette fonction si l'on exécute `somme(5)` ? *(Écrire la somme calculée avec des ... !)*

Q 2 Sauriez-vous l'écrire avec le symbole $\sum$?

☐ Exercice L2 (Sommes/Produits et Python)

Avec n un entier naturel, on considère les sommes/produits suivants :

$$A(n) = \sum_{k=2}^{n+1} 3 \qquad B(n) = \sum_{k=1}^{n} 2k \qquad C(n) = \sum_{k=n+1}^{2n} (k+2) \qquad D(n) = \prod_{j=0}^{2n} e^{-j} \qquad E(n) = \prod_{k=1}^{n} k^2$$

Q 1 Écrire pour chacune des sommes précédentes une fonction python qui reçoit en argument un nombre n et qui renvoie la valeur numérique de la somme correspondante. Les saisir sur un ordinateur et donner alors les valeurs de $A(10)$, $B(10)$, $C(10)$, $D(10)$, $E(10)$ et $F(10)$.

Q 2 Donner pour chacune des sommes une expression en fonction de n (sans le symbole $\sum$ ni $\prod$), puis vérifier la validité de ces expressions en comparant les résultats obtenus avec ceux de la question précédente.

Q 3 Un peu plus dur : calculer $F(n) = \displaystyle\prod_{k=2}^{n} \frac{k^2-1}{k}$

☐ Exercice L3 (partitionner)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k$ en regroupant les termes deux à deux.

☐ Exercice L4 (partitionner)

Exprimer en fonction de $n \in \mathbb{N}$ la somme $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k k^2$

☐ Exercice L5 (changement d'indice)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on considère :

$$S = \sum_{k=0}^{2n} \cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$$

Montrer (grâce à un changement d'indice par symétrie) que $S = -S$ puis que $S = 0$.

☐ Exercice L6 (Calculer une somme par translation)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k.2^k)$.

Par une translation $(j = k-1)$, démontrer que $S_n = 2(S_n - n2^n - 1 + 2^n)$, et déduire S_n en fonction de n.

☐ Exercice L7 (Calculer par télescopage)

Q 1 Calculer $A = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)$

Q 2 Déterminer l'expression de $\sum_{k=1}^{n} k\, k!$ en fonction de n. *(Indic.: écrire autrement $(k+1)! - k!$)*

Q 3 Exprimer en fonction de n : $P_n = \prod_{k=2}^{n} \left(\frac{k}{k+1}\right)$ et $Q_n = \prod_{k=1}^{n} 2^{\frac{1}{k(k+1)}}$

☐ Exercice L8

Soit $(a_k)_{1\leq k\leq n}$ et $(b_k)_{1\leq k\leq n}$ des réels.

Les expressions suivantes sont-elles égales à $\sum_{k=1}^{n}(a_k b_k)$? (*sinon, donner un contre-exemple*)

$$A = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) \quad ; \; B = \sum_{k=1}^{n}(a_{n+1-k}b_{n+1-k}) \quad ; \quad C = \frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2 - \sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)^2\right)$$

☐ Exercice L9 (sommes géométriques)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit : $u_n = \sum_{k=1}^{n} 9.10^{-k}$.

Q 1 Donner l'écriture décimale de u_1, u_2, u_3.

Q 2 Exprimer u_n en fonction de n, en déduire $\lim_{n\to+\infty} u_n$

Q 3 Justifier que : 0,9999... = 1

☐ Exercice L10 (Une somme classique... encore !)

Dans le cours on a rencontré $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, puis $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
On s'intéresse maintenant à la somme :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^3$$

Q 1 Calculer quelques termes de la suite (S_n) et conjecturer que l'on a $S_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Q 2 On va envisager 2 méthodes différentes :

a. En s'inspirant de la technique utilisée en cours (sommes télescopiques), développer puis simplifier l'expression $(k+1)^4 - k^4$ et sommer les deux membres obtenus...

b. Démontrer la formule proposée par récurrence.

Q 3 À l'aide de cette nouvelle formule, montrer que $\sum_{k=0}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

□ Exercice L11 (Sommes doubles)

On considère les sommes doubles suivantes : $A(n) \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} ij$ et $B(n) = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{k=i}^{n} \frac{i}{k+1} \right)$

Q 1 Représenter la somme $A(n)$ dans un tableau à double entrée.

Q 2 Calculer $A(n)$ en fonction de n.

Q 3 Calculer $B(n)$ en fonction de n.

□ Exercice L12 (Binôme de Newton)

Calculer $A = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 5^k$ puis $B = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-3)^k$

□ Exercice L13 (Binôme de Newton)

Q 1 Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

Q 2 Montrer que $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ si $n > 0$.

Q 3 À l'aide des deux points précédents, calculer $\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k}$ et $\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k}$

□ Exercice L14 (Binôme de Newton)

Quel est le coefficient de $x^4 y^8$ dans le développement de l'expression $(3x - 7y)^{12}$?

□ Exercice L15

Q 1 Calculer la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$ de deux manières différentes :

- **a.** en obtenant deux expressions pour la dérivée de la fonction f définie par $f(x) = (x+1)^n$
- **b.** En commençant par montrer que $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

Q 2 En s'inspirant de l'une des deux méthodes précédentes, calculer la somme :

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \binom{n}{k}$$