CHAPITRE

$\mathscr{L}$

TSI[1]

Lycée Artaud

2025/2026

Sommes

Sommaire

Dans toute la suite, i, j, k, n, p, q désignent des entiers naturels.
I et J désignent des parties de $\mathbb{N}$ (ou même de $\mathbb{Z}$).

☐ ✍ **Exercice L.1**

I Symboles $\sum$ et $\prod$

Définition I.0.1

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de réels (ou de complexes) indexée sur I.

- Si I est non vide, $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i$ désigne la somme de tous les x_i lorsque i parcourt I.
- Si I est non vide, $\displaystyle\prod_{i\in I} x_i$ désigne le produit de tous les x_i lorsque i parcourt I.
- Si $I = [\![n,p]\!]$, avec $n \leq p$, on note : $\displaystyle\sum_{i=n}^{p} x_i = x_n + \ldots + x_p$ et $\displaystyle\prod_{i=n}^{p} x_i = x_n \times \ldots \times x_p$
- Si I est vide, alors par convention : $\displaystyle\sum_{i\in\emptyset} \ldots = 0$ et $\displaystyle\prod_{i\in\emptyset} \ldots = 1$.

Remarques –

- l'indice de sommation ou de produit est **muet** : $\displaystyle\sum_{i=n}^{p} x_i = \sum_{j=n}^{p} x_j$ ... et bien entendu le résultat d'une somme ou d'un produit **ne dépend jamais de l'indice**.
- Par convention on posera si $n > p$: $\displaystyle\sum_{i=n}^{p} x_i = 0$ et $\displaystyle\prod_{i=n}^{p} x_i = 1$.
- Les écritures suivantes sont fausses :
  - $\displaystyle k\sum_{k=1}^{n} x_k$ car ....
  - $\displaystyle\sum_{k=1}^{k} x_k$ car ....

  et celle-ci est ambiguë : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k+1$, car ....

Exemple (I.0.2)

- Que vaut $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} k$?

  S1

- Si $\mathscr{P}$ est l'ensemble des nombres premiers inférieurs à 10, que vaut $\displaystyle\sum_{k\in\mathscr{P}} k$?

  S2

Olivier BRÉBANT
Lycée Artaud – 2025/2026

- Que vaut pour $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{n} 1$? et $\sum_{k=0}^{n} 1$?

S3

- Si $\lambda \in \mathbb{C}$, que vaut $\sum_{k=1}^{n} \lambda$?

S4

II Les premières règles de calcul

II.1 "Linéarité"

Propriété II.1.1

Soit (x_i) et (y_i) désignent des familles de complexes indexées sur I. Alors :

$$\sum_{i\in I}(x_i+y_i)=\sum_{i\in I}x_i+\sum_{i\in I}y_i \quad \text{et} \quad \prod_{i\in I}(x_iy_i)=\left(\prod_{i\in I}x_i\right)\left(\prod_{i\in I}y_i\right)$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et $p \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i\in I}(\lambda x_i)=\lambda\sum_{i\in I}x_i \quad \text{et} \quad \prod_{i\in I}(x_i)^p=\left(\prod_{i\in I}x_i\right)^p$$

II.2 Regroupement de termes/facteurs

Propriété II.2.1

Soit (x_i) une famille de complexes indexées sur $I \cup J$, avec I et J **disjoints**. Alors :

$$\sum_{i\in I}x_i+\sum_{j\in J}x_j=\sum_{k\in I\cup J}x_k \quad \text{et} \quad \left(\prod_{i\in I}x_i\right)\left(\prod_{j\in J}x_j\right)=\prod_{k\in I\cup J}x_k$$

Exemple (II.2.2)

Voyons des cas particuliers courants. Considérons $p \in [\![1, n]\!]$.

$\sum_{k=1}^{n}x_k=\sum_{k=1}^{\mathbf{p}}x_k+\sum_{\mathbf{k=p+1}}^{n}x_k$	$\sum_{k=1}^{n}x_k=\sum_{\substack{i=1\\ i \text{ pair}}}^{n}x_i+\sum_{\substack{i=1\\ i \text{ impair}}}^{n}x_i$

☐ ✍ **Exercice L.2** ☐ ✍ **Exercice L.3** ☐ ✍ **Exercice L.4**

III Changement d'indice

Dans de nombreuses situations il est intéressant de modifier l'indexation d'une somme ou d'un produit. Ces opérations étant commutatives, il est clair que les résultats sont les mêmes !

III.1 Décalage

Par exemple en posant $j = k + r$ on a :

$$\boxed{\sum_{k=p}^{q} x_k = \sum_{j=p+r}^{q+r} x_{j-r}}$$

Exemple (III.1.1)

Pour $n \geqslant 2$, on souhaite calculer $S = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+2)}$.
Vérifier l'égalité : $\frac{2}{k(k+2)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}$.
Reporter dans l'expression de S puis effectuer le changement $j = k + 2$ dans la deuxième somme :

S5

Au final il reste :

$$S = \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

III.2 Symétrie

Cette fois-ci on pose $j = n - k$ et on obtient :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} x_k = \sum_{j=0}^{n} x_{n-j}}$$

Exemple (III.2.1)

- Quelle est l'écriture permettant d'inverser l'ordre de sommation de $\sum_{k=p}^{q} x_k$?

S6

- Démontrer la formule bien connue donnant la somme des n premiers entiers :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$$

Olivier BRÉBANT
Lycée Artaud – 2025/2026

S7

III.3 Sommes et produits télescopiques

Soit p et q deux entiers naturels tels que $p \leqslant q$. Alors

$$\boxed{\sum_{i=p}^{q}(x_{i+1}-x_i) = x_{q+1}-x_p \quad \text{et} \quad \prod_{i=p}^{q}\frac{x_{i+1}}{x_i} = \frac{x_{q+1}}{x_p} \qquad (\forall i \in [\![p,q]\!],\ x_i \neq 0)}$$

Exemple (III.3.1)

- Démontrer le résultat précédent en écrivant la somme avec des "petits points" puis en effectuant des changements d'indices ...

S8

- Calculer $A = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$

S9

- Calculer $B = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)$.

S10

- Calculer $C = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$ avec la technique du *développement en éléments simples*.

S11

☐ ✍ **Exercice L.5** ☐ ✍ **Exercice L.6** ☐ ✍ **Exercice L.7** ☐ ✍ **Exercice L.8**

IV Des sommes classiques

IV.1 Somme des termes d'une suite arithmétique

Propriété IV.1.1

Pour n et p dans $\mathbb{N}$ on a : La **somme des termes d'une suite arithmétique** de raison a et de premier terme $u_p = b$:

$$\boxed{\sum_{k=p}^{n} u_k = (n-p+1)\frac{(u_p+u_n)}{2}}$$

La cas particulier où $a = 1$ et $p = 1$ donne :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$$

Preuve

L'idée est de faire un changement d'indice par symétrie et d'ajouter les deux sommes...

S12

☐

IV.2 Somme des carrés

Propriété IV.2.1

Pour $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Preuve

On remarque que $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$ et on somme ces deux membres pour k variant de 1 à n...

S13

IV.3 Somme des termes d'une suite géométrique

Propriété IV.3.1

Si a est un nombre complexe différent de 1 on a :

$$\sum_{k=p}^{n} a^k = a^p \frac{1-a^{n-p+1}}{1-a}$$

Preuve

Pour un complexe a on a en développant le membre de gauche :

$$(1-a)\sum_{k=p}^{n} a^k = \sum_{k=p}^{n}(a^k - a^{k+1}) = a^p - a^{n+1}$$

(Simplification par télescopage). Il suffit ensuite de diviser par $(1-a)$ et factoriser par a^p pour obtenir le résultat. □

Exemple (IV.3.2)

- Écrire cette formule pour $p = 0$?

S14

- Factoriser $1 - a^{n+1}$

S15

☐ ✍ **Exercice L.9** ☐ ✍ **Exercice L.10**

IV.4 Factorisation de $a^n - b^n$

Propriété IV.4.1

Pour tous complexes a et b et tout entier naturel n non nul :

$$\boxed{a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k}$$

Preuve

développer le membre de droite et reconnaître une somme télescopique :

S16

□

V Sommes doubles

V.1 Sommes rectangulaires

Définition V.1.1 (Sommes rectangulaires)

Si I et J sont des ensembles finis, et $(a_{i,j})$ une famille doublement indexée sur $I \times J$, on appelle somme double une somme de la forme :

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j} = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} a_{i,j}\right) = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} a_{i,j}\right)$$

On croisera au travers des exos tout un tas d'écritures équivalentes...

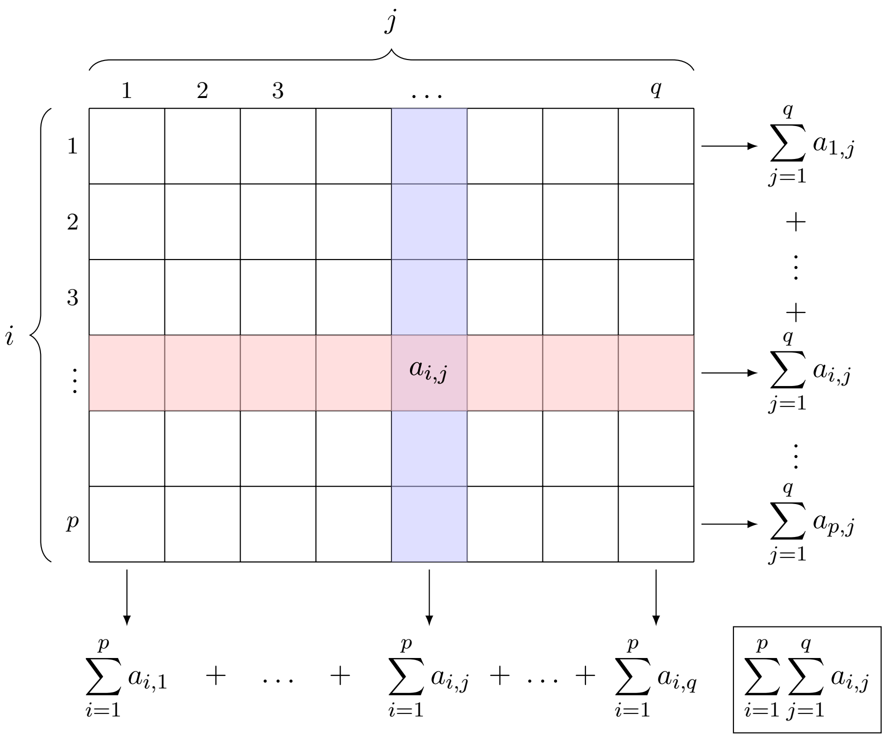
Remarques – Lorsque les $a_{i,j} = b_i c_j$ on dit que les variables sont « **séparées** », et dans ce cas, la somme se simplifie un peu :

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} b_i c_j = \left(\sum_{i\in I} b_i\right)\left(\sum_{j\in J} c_j\right)$$

S17

Olivier BRÉBANT
Lycée Artaud – 2025/2026

Visualisons ces sommes doubles comme des sommations suivant des lignes ou des colonnes d'un tableau :



Exemple (V.1.2)

Calculer :

- $A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} ij$

S18

- $B = \sum_{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2} i\,2^j$

S19

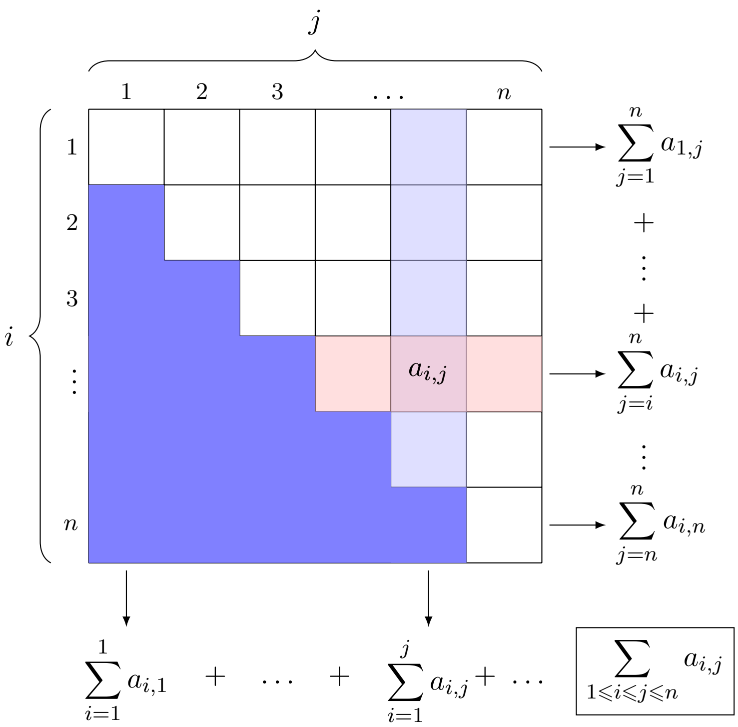
V.2 Sommes triangulaires

Parfois les bornes peuvent dépendre des indices, cela donne des sommes dites "triangulaires"

♪ Définition V.2.1 (Sommes triangulaires)

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} a_{i,j}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}\right)$$

Voyons à nouveau cela à l'aide d'un tableau :



Exemple (V.2.2)

- Montrer la formule classique suivante : $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_i a_j$

S20

- Calculer la somme : $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} 1$, puis interpréter "graphiquement".

S21

☐ ✍ **Exercice L.11**

VI Binôme de Newton

Voir l'activité d'introduction aux coefficients binomiaux en comptant les chemins…

VI.1 Coefficients binomiaux

♪ Définition VI.1.1 (factorielle)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle **factorielle** de n, le nombre noté $n!$ qui vaut

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k \quad \text{si } n > 0 \qquad \text{et} \qquad 0!=1$$

♪ Définition VI.1.2 (Coefficients binomiaux)

Étant donnés deux entiers naturel n et p, on appelle Coefficient binomial **« p parmi n »**, et l'on note $\binom{n}{p}$ le nombre :

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!}$$

Exemple (VI.1.3)

Si $p < n$, écrire cette formule uniquement avec des factorielles :

S22

Remarques – quelques valeurs remarquables à connaître :

- Si $p > n$ alors $\binom{n}{p} = 0$ (car l'un des facteurs est nul)
- Pour tout $n \in N$ on a : $\binom{n}{1} = n$
- Pour tout $n \in N$ on a : $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- Pour tout $n \in N$ on a : $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

Propriété VI.1.4

- $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ si $p \leqslant n$.
- $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$ si $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$ (Relation de Pascal)

Exemple (VI.1.5)

- À l'aide de la relation de Pascal, dessiner le triangle de Pascal qui regroupe sous forme triangulaire les coefficients binomiaux pour $0 \leqslant n \leqslant 7$:

S23

- Démontrer par récurrence sur n que les coefficients binomiaux sont des entiers.

VI.2 Formule du binôme de Newton

Propriété VI.2.1 (Formule du binôme)

Pour a et b dans $\mathbb{C}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p}$$

Preuve

par récurrence… mais assez lourde à écrire. On l'admettra. $\square$

Exemple (VI.2.2)

- Développer $(a+b)^3$:

S24

- Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$

S25

- Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0$ si $n>0$.
- À l'aide des deux points précédents, calculer $\displaystyle\sum_{\substack{k=0\\k \text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k}$ et $\displaystyle\sum_{\substack{k=0\\k \text{ impair}}}^{n}\binom{n}{k}$

☐ ✍ **Exercice L.12** ☐ ✍ **Exercice L.13** ☐ ✍ **Exercice L.14** ☐ ✍ **Exercice L.15**