Planche K
Fonctions usuelles

□ Exercice K1 (inégalités classiques)

Q 1 **a.** Montrer que, pour tous réels a et b, $\quad ab \leq \dfrac{1}{2}(a^2+b^2)$.

b. Montrer que, pour tous $a>0$, $b>0$, $\quad \dfrac{1}{2}(\ln a + \ln b) \leq \ln\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$

Q 2 **a.** Montrer que, pour tous $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a}+\sqrt{b}$.

b. En déduire que, pour tous réels x, y : $\sqrt{|x-y|} \geqslant \left|\sqrt{|x|}-\sqrt{|y|}\right|$.

□ Exercice K2 (avec des valeurs absolues)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les (in)équations :

Q 1 $|x^2-1| = 1$

Q 2 $|x^2-1| < 1$

Q 3 $|1-4x| \geqslant 2$

Q 4 $x^2 - x > |x^2+x-2|$

Q 5 $|x-1| \leq |x-2|$

Q 6 $|x^2-2| \leq |x|$

□ Exercice K3 (représentations graphiques)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, on considère les ensembles de points :

$$\mathcal{E} = \{M(x,y)\ /\ |x+y| < 4\} \qquad \mathcal{F} = \{M(x,y)\ /\ |x|+|y| < 4\}$$

Montrer que l'un est inclus dans l'autre. Représenter graphiquement les domaines correspondants.

□ Exercice K4 (Avec des parties entières)

Q 1 Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall p \in \mathbb{Z}, \quad \lfloor x+p \rfloor = \lfloor x \rfloor + p$.

Q 2 A-t-on pour tout x et y réels : $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$?

□ Exercice K5 (Partie entière et arrondis)

Q 1 Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor$.

Q 2 Pour $x \geqslant 0$, que fait la formule $\dfrac{\lfloor 2x \rfloor}{2}$?

Q 3 Écrire une formule qui donne pour $x \geqslant 0$ l'arrondi au demi-entier supérieur.

□ Exercice K6 (Approximation décimale)

Soit x un réel positif. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$.

Q 1 *Expérimentation* : prenons dans cette question $x = \pi$. Calculer les réels a_0, a_1 et a_2.

Q 2 Conjecturer ce que représentent les a_n vis-a-vis de l'écriture décimale de x.

Q 3 Montrer que la suite (a_n) est bornée, puis qu'elle converge (*Penser au théorème des gendarmes...*)

On vient de voir que tout nombre réel est approché d'aussi près que l'on veut par un nombre décimal. On dit que $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$. De même, puisque $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ on a aussi $\mathbb{Q}$ dense dans $\mathbb{R}$.

□ Exercice K7

Étudier les variations de $g : x \mapsto |\ln(x+2)-1|$

□ Exercice K8 (Avec une fonction auxiliaire)

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x + \dfrac{\ln x}{x}$.

Q 1 **Étude d'une fonction auxiliaire :**
On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x^2 + 1 - \ln x$. Étudier le signe de la fonction g en étudiant au préalable ses variations.

Q 2 **Étude de la fonction f :**

- **a.** Déterminer la limite en 0 de la fonction f. Quelle est l'interprétation graphique de ce résultat ?
- **b.** Déterminer la limite en $+\infty$ de f puis montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$.
- **c.** Dresser la tableau de variations de la fonction f sur son ensemble de définition *(Penser à utiliser Q1...)*
- **d.** Déterminer le point A de la courbe $\mathcal{C}_f$ en lequel la tangente $\mathcal{T}$ est parallèle à la droite $\mathcal{D}$.

□ Exercice K9 (Étudier une fonction par double dérivation)

On définit la fonction f par : $f(x) = x\ln(1+x)$.

Q 1 Étudier soigneusement la fonction f sur son ensemble de définition (*indic : lire l'intitulé !*).

Q 2 $\star$ On définit ensuite la fonction g par $g(x) = \mathrm{e}^x \ln(1+\mathrm{e}^x)$. En utilisant la composition des fonctions déduire de $Q1$ les variations de g (donc sans dériver).

□ Exercice K10 (Utiliser les propriétés de exp, ln, log)

Q 1 Montrer que : $\mathrm{e}^x - 1 = 2\mathrm{e}^{-x} \iff \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x - 2 = 0$. Résoudre alors ces équations.

Q 2 Résoudre les 2 équations après avoir déterminé les ensembles de définition :

$$(E_1) : \quad \ln\left(\frac{x+1}{2x+1}\right) \leqslant 1 \quad \text{et} \quad (E_2) : \ln(x+1) - \ln(2x+1) \leqslant 1$$

Q 3 À l'aide de la fonction log, résoudre : $\sqrt{10^{x+2}} = 5$; $2\log\left(\frac{x}{10}\right) + 1 \geq \log(x-1)$.

Q 4 Simplifier (sous réserve d'existence à étudier) : $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\ln(x^2)}$ et $x^{\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}}$.

□ Exercice K11 (Étudier une fonction en exp de base a)

On définit $f : x \mapsto 2^{x+1} - 2^{2x}$.
Étudier entièrement f. (*On pourra montrer que f' a le même signe que* $(1-2^x)$).

□ Exercice K12 (Étudier une fonction en exp de base a)

Étudier en détail les variations de la fonction f définie par : $f(x) = (\sqrt{x})^x$.

□ Exercice K13 (Manipuler des fonctions puissance)

Dans un pays, on admet qu'en moyenne, les prix ont doublé en 30 ans (ce qui correspond à une augmentation de 100% sur 30 ans).

Q 1
- **a.** Peut-on affirmer que cette augmentation correspond à un taux d'inflation annuel moyen de $\frac{100\%}{30}$? *On donnera un argument qualitatif.*
- **b.** Montrer que le taux d'inflation moyen annuel t sur cette période vérifie l'équation $(1+t)^{30} = 2$.
- **c.** Étudier la fonction $x \mapsto x^{30}$, et résoudre **mathématiquement** l'équation précédente.
En déduire la valeur de t arrondie à 0,01 % près.

Q 2 Supposons que les prix ont augmenté de 2% chaque année. Au bout de combien d'années consécutives les prix auront globalement doublé sur la période ?

□ Exercice K14 (Croissances comparées)

Q 1 Calculer: $\lim\limits_{x\to+\infty}(xe^x - x^{10})$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}}{x^2-e^x}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{2x}}{x^2-e^x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x+e^{x^2}-x^3}{e^x}$

Q 2 Calculer rigoureusement $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x - x\ln x)$.

On pourra, par exemple, justifier que, pour tout $x>0$: $\ln x \leq x$.

Q 3 Calculer : $\lim\limits_{x\to0^+} x^{x^x}$ et $\lim\limits_{x\to0^+}(x^x)^x$.

□ Exercice K15 (fonction trigo)

On considère la fonction $f : x \mapsto \cos^3(x) + \sin^3(x)$.

Q 1 Conjecturer les propriétés (périodicité, parité, symétrie) avec un logiciel.

Q 2 Justifier vos conjectures, et en particulier, montrer que la courbe est symétrique par rapport à l'axe $x = \dfrac{\pi}{4}$.

En déduire qu'il suffit alors d'étudier la fonction sur l'intervalle $I = \left[\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{5\pi}{4}\right]$.

Q 3 Dresser le tableau de variations de la fonction f sur I puis esquisser sa représentation graphique en prenant soin de bien placer toutes les tangentes horizontales.

□ Exercice K16 (fonction trigo)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\cos 2x}{\sin x}$.

Q 1 Déterminer l'ensemble de définition de f. Choisir un ensemble d'étude.

Q 2 Étudier la dérivabilité de f, puis ses variations sur une période. Dresser son tableau de variation.

Q 3 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos 2x = \sin x$. Qu'obtient-on vis-à-vis de f ?

□ Exercice K17 (fonction trigo)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \tan(\cos x)$.

Q 1 Déterminer l'ensemble de définition de f, sa parité, sa périodicité.

Q 2 À l'aide d'un schéma de composition, étudier rapidement les variations de f.

□ Exercice K18 (formules trigo)

Q 1 À l'aide du cercle trigonométrique, calculer ou exprimer autrement :

$\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)$, $\sin\left(\frac{-3\pi}{4}\right)$, $\sin\left(\frac{17\pi}{6}\right)$, $\cos\left(a+\frac{\pi}{2}\right)$, $\sin\left(a+\frac{\pi}{2}\right)$, $\tan\left(a+\frac{\pi}{2}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)$.

Q 2 <u>En partant de la gauche</u>, montrer que :

$$\cos x \sin x + \frac{\sqrt{3}-1}{2}\cos^2 x \leqslant \frac{\sqrt{3}+1}{2}\sin^2 x \iff \sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) \leqslant \frac{1}{2}$$

En déduire l'ensemble des solutions.

□ Exercice K19 (trigo réciproque...)

Après avoir précisé leur ensemble de définition, simplifier les expressions suivantes :
1. $\sin(\arcsin(2x))$ **2.** $\tan(2\arctan(x))$ **3.** $\sin(2\arccos(x))$ **4.** $\tan\left(\arcsin(x) - \frac{\pi}{2}\right)$

□ Exercice K20

Donner l'ensemble de dérivabilité et la dérivée des fonctions suivantes :
$f_1 : x \mapsto \sqrt{x}e^{x^2}$ $f_2 : x \mapsto \dfrac{2^x}{x}$ $f_3 : x \mapsto x\arctan(x^2)$ $f_4 : x \mapsto \arcsin\left(\dfrac{1}{e^x+1}\right)$

□ Exercice K21

Q 1 Montrer que la fonction $f : x \mapsto \arcsin(x) + \arccos(x)$ est constante sur $]-1,1[$, puis sur $[-1,1]$.

Q 2 Étudier la fonction f définie par : $f(x) = \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$, et déceler une expression simplifiée en fonction de $\arctan x$.

□ Exercice K22 (formule de Hutton)

$\star$ Démontrer la formule de *Hutton* (1776) : $2\arctan\left(\dfrac{1}{3}\right) + \arctan\left(\dfrac{1}{7}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.
(On pourra appliquer la fonction tangente...et justifier soigneusement le raisonnement.)

□ Exercice K23

Soit f la fonction définie sur $I = [\pi; \frac{3\pi}{2}]$ par $f(x) = -3\sin^2(x) + 5$.
Montrer que f admet une fonction réciproque g dont on déterminera les domaines de définition et de dérivabilité, puis calculer $g'\left(\frac{11}{4}\right)$.