CHAPITRE

$\mathscr{K}$

TSI[1]

Lycée Artaud

2025/2026

Fonctions usuelles

Sommaire

I Fonctions racine carrée et valeur absolue

I.1 Racine carrée

Définition I.1.1

- Pour tout $x \geqslant 0$, on note $\sqrt{x}$ l'unique nombre positif dont le carré vaut x.
- La **fonction racine carrée** est définie par : $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$

  C'est la bijection réciproque de la fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$.

Propriété I.1.2

La fonction racine carrée est :

- Définie sur $\mathbb{R}^+$,
- Dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$, et $\forall x \in \mathbb{R}_*^+$, $\boxed{(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}}$
- Strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$
- Admet une tangente verticale en 0.

Allure de sa représentation graphique :

S1

I.2 Valeur absolue

Définition I.2.1

La fonction **valeur absolue** est définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par :$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$

Remarques – On a aussi vu que $|x| = \text{dist}(x, 0)$.

Propriété I.2.2

La fonction valeur absolue est :

- Définie sur $\mathbb{R}$,
- Dérivable sur $\mathbb{R}^*$,
- Décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Olivier BRÉBANT
Lycée Artaud – 2025/2026

Allure de sa représentation graphique :

S2

☐ ✍ **Exercice K.1** ☐ ✍ **Exercice K.2** ☐ ✍ **Exercice K.3**

II Fonction partie entière

♪ Définition II.0.1

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on appelle **partie entière de** x, le plus grand entier inférieur ou égal à x. On la note $E(x)$ ou encore $\lfloor x \rfloor$.
- La fonction partie entière est la fonction qui à tout $x \in \mathbb{R}$ associe le nombre $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$.

Allure de sa représentation graphique :

S3

Propriété II.0.2

Soit $a \in \mathbb{R}$. La partie entière de a est l'unique entier relatif vérifiant :

$$\lfloor a \rfloor \leqslant a < \lfloor a \rfloor + 1 \qquad \text{ou encore} \qquad a - 1 < \lfloor a \rfloor \leqslant a$$

☐ ✍ **Exercice K.4** ☐ ✍ **Exercice K.5** ☐ ✍ **Exercice K.6**

III Fonctions exponentielles et logarithmes

III.1 Logarithme népérien (1610) et exponentielle (1748)

Ces deux fonctions sont *réciproques* l'une de l'autre. On rappelle l'allure de leurs courbes :

S4

Et les relations fondamentales suivantes :

Propriété III.1.1

- $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\boxed{\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x.\mathrm{e}^y}$ et $\boxed{\mathrm{e}^{x-y} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}}$ et $\boxed{(\mathrm{e}^x)^y = \mathrm{e}^{xy}}$
- $\forall x, y > 0$, $\boxed{\ln(xy) = \ln x + \ln y}$ et $\boxed{\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{\ln(x^n) = n \ln x}$

On pourra retenir que la fonction logarithme « transforme les produits en somme »...

Propriété III.1.2 (Dérivation)

Si u est une fonction dérivable sur I et v une fonction ne s'annulant pas et dérivable sur I on a pour tout $x \in I$:

$$\boxed{\left(\mathrm{e}^{u(x)}\right)' = u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}} \quad \text{et} \quad \boxed{\ln(|v(x)|)' = \frac{v'(x)}{v(x)}}$$

☐ ✍ **Exercice K.7** ☐ ✍ **Exercice K.8** ☐ ✍ **Exercice K.9**

III.2 Logarithme et exponentielle de base « a »

III.2.1 Exponentielle de base « a »

Soit a un nombre réel. On sait déjà ce que représente a^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On voudrait prolonger cette notation pour n dans $\mathbb{R}$... (mais uniquement pour $a > 0$).
On va prolonger la définition de $a^n = \mathrm{e}^{\ln a^n} = \mathrm{e}^{n \ln a}$. D'où :

♪ Définition III.2.1

Soit $\boxed{a > 0}$. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction **exponentielle de base** a : $\boxed{\exp : x \mapsto a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}}$.

Propriété III.2.2

La fonction $x \mapsto a^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $(a^x)' = \ln(a) \times a^x$.
Elle est strictement croissante si $a > 1$, strictement décroissante si $0 < a < 1$, constante à 1 si $a = 1$.

Remarques – À chaque fois que l'on est face à une fonction avec la variable en exposant, on se ramène TOUJOURS à sa définition avec EXP.

III.2.2 Logarithme de base « a »

La fonction $x \mapsto a^x$ admet une fonction réciproque ssi $a \neq 1$, et son expression est $y \mapsto \frac{\ln y}{\ln a}$.

♪ Définition III.2.3

Pour $a \neq 1$, la fonction réciproque de $x \mapsto a^x$, définie sur $\mathbb{R}^+*$, est appelée **logarithme de base** a, et on a : $\boxed{\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}}$.

Propriété III.2.4

- On a l'équivalence :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \qquad \log_a x = k \iff x = a^k}$$

- $\log_a$ est strictement croissante si $a > 1$ et strictement décroissante si $0 < a < 1$.

Remarques – Pour les études, se ramener TOUJOURS à la définition en ln, sauf pour résoudre :

$$\log x = k \Leftrightarrow x = 10^k$$

.

Exemple (III.2.5)

Des fonctions log en base autre que e :

- La plus connue est le logarithme décimal : $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$.
  Elle apparaît dans le pH : pH$= -\log([H_3O^+])$, le décibel, la magnitude.
  On l'utilise aussi dans les graduations en échelles semi-logarithmiques ou log-log lorsque les données sont dans l'infiniment grand ou petit.
- On utilise aussi le logarithme en base 2 en informatique. Par exemple pour compter le nombre de bits nécessaires pour coder un entier. Avec n bits on code tous les entiers p vérifiant : $2^{n-1} \leqslant p < 2^n$. On applique log et on ajoute 1...

☐ ✍ **Exercice K.10** ☐ ✍ **Exercice K.11** ☐ ✍ **Exercice K.12**

III.3 Fonctions puissances

On connaît déjà :

- pour tout $x \in \mathbb{R}$: x^n avec $n \in \mathbb{N}$, x^m avec $m \in \mathbb{Z}$ ($x \neq 0$ si $m < 0$),
- pour tout $x \in \mathbb{R}^+$: $x^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{x}$ avec $m \in \mathbb{N}$, x^q avec $q \in \mathbb{Q}$ ($x \neq 0$ si $m < 0$).

On peut aussi définir :

♪ Définition III.3.1

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit sur $\mathbb{R}_*^+$ la fonction : $x \mapsto x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln x}$.

Propriété III.3.2

$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ et $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$. Elle est strictement croissante si $\alpha > 0$ et strictement décroissante si $\alpha < 0$.
ATTENTION ! – Si $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, la fonction puissance n'est pas définie sur les négatifs !

Il est facile de vérifier que les formules algébriques connues pour des puissances entières sont encore valables pour des puissances réelles. Ainsi pour tout réels a et b et pour tout $x > 0$ on a :

$(xy)^a = x^a \times y^a$	$x^{a+b} = x^a \times x^b$	$(x^a)^b = x^{ab}$

☐ ✍ **Exercice K.13**

III.4 Comparaisons de ces fonctions

RAPPEL des formes indéterminées :

$$\infty \times 0 \quad \frac{\infty}{\infty} \quad +\infty - \infty \quad 0/0 \quad 1^\infty \quad 0^0$$

Propriété III.4.1 (croissances comparées)

- exp est prépondérante en $\pm\infty$ devant toutes les fonctions puissance, c'est-à-dire :

$$\forall \alpha > 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} x^\alpha e^x = 0$$

- ln est négligeable en 0 et $+\infty$ devant toutes les fonctions puissances, c'est-à-dire :

$$\forall \alpha > 0, \forall \beta > 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^\beta x}{x^\alpha} = 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln^\beta x = 0$$

- Soit $a > 1$, on a plus généralement :
  $x \mapsto a^x$ est prépondérante en $\pm\infty$ devant toutes les fonctions puissances,
  $x \mapsto \log_a(x)$ est négligeable en en 0 et $+\infty$ devant toutes les fonctions puissances.

REMARQUES – Si $\alpha < 0$, $\lim_{x\to-\infty} x^\alpha e^x = 0$, $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$... ne sont pas des formes indéterminées.

BILAN : En notant << "est négligeable devant", alors on a : $\log_a(x) \underset{+\infty}{<<} x^\alpha \underset{+\infty}{<<} a^x$.

Techniques de calcul de limites

1. On donne le résultat sans justification si elle n'est pas une FI.
2. Sinon, la technique fondamentale est la **factorisation**. On conclut alors par **Croissance Comparée**.

☐ ✍ **Exercice K.14**

IV Fonctions trigonométriques

IV.1 Les fonctions trigonométriques circulaires directes

Les fonctions **cos** et **sin** vous sont maintenant bien connues. Rappelons l'essentiel :

- Sin et Cos sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

- Elles sont 2π-périodiques.
- Sin est impaire ($\sin(-x) = -\sin(x)$) et $\sin' = \cos$.
- Cos est paire ($\cos(-x) = \cos(x)$) et $\cos' = -\sin$.
- On a $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ et $\sin(x + \pi/2) = \cos(x)$

Voyons d'un peu plus près la fonction $\boxed{\tan = \dfrac{\sin}{\cos}}$:

Étape 1 : ensemble de définition, périodicité, parité $\Rightarrow$ ensemble d'étude

S5

Étape 2 : sens de variations

S6

Étape 3 : représentation graphique

S7

☐ ✍ **Exercice K.15** ☐ ✍ **Exercice K.16** ☐ ✍ **Exercice K.17** ☐ ✍ **Exercice K.18**

IV.2 Les fonctions trigonométriques *réciproques*

IV.2.1 Cosinus et arccosinus

Définition IV.2.1

La fonction cos : $[0;\pi] \to [-1;1]$ est bijective, donc admet une fonction réciproque, nommée "arccosinus" et on a

$$\boxed{\arccos : [-1\,;1] \to [0\,;\pi]}$$

Propriété IV.2.2

On a :

$$\boxed{\forall y \in [-1,1],\ \cos(\arccos(y)) = y} \quad \text{et} \quad \boxed{\forall x \in [0,\pi],\ \arccos(\cos(x)) = x}$$

ATTENTION ! – Si $k \in [-1,1]$, alors :

$$\boxed{\cos x = k \iff x = \pm \arccos k\ [2\pi]}$$

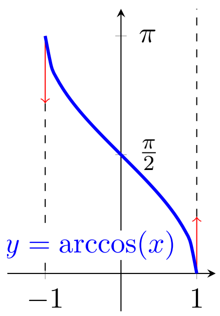
Propriété IV.2.3

- arccos est strictement décroissante sur $[0\,;\pi]$.
- arccos est dérivable sur l'ouvert $]-1\,;1[$ et :

$$\boxed{\arccos'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}}$$

Preuve :

- cos est strictement décroissante sur $[0\,;\pi]$, on en déduit donc qu'arccos est aussi décroissante sur $[-1\,;1]$
- en tant que fonction réciproque de cos, arccos est dérivable partout où $\cos'$ ne s'annule pas. Or, $\cos' = -\sin$ s'annule en 0 et en π, donc arccos est dérivable sur $]-1\,;1[$.
- Pour tout $y \in]-1\,;1[$, on a: $\arccos'(y) = \dfrac{1}{\cos'(\arccos y)} = -\dfrac{1}{\sin(\arccos y)}$.
  Or, on a $(\underbrace{\cos(\arccos y)}_{f(f^{-1}(y))=y})^2 + (\sin(\arccos y))^2 = 1$. Donc $(\sin(\arccos y))^2 = 1 - y^2$ et comme $\arccos y \in [0\,;\pi]$, $\sin(\arccos y) \geq 0$ et ainsi, $\sin(\arccos y) = \sqrt{1-y^2}$. ■



IV.2.2 Sinus et arcsinus

♪ Définition IV.2.4

La fonction sin : $[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}] \to [-1\,;\,1]$ admet une fonction réciproque, nommée "arcsinus" et on a :

$$\boxed{\arcsin \; : [-1\,;\,1] \to [-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}]}$$

Propriété IV.2.5

On a :

$$\boxed{\forall y \in [-1,1],\ \sin(\arcsin(y)) = y} \quad \text{et} \quad \boxed{\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right],\ \arcsin(\sin(x)) = x}$$

Attention ! – Si $k \in [-1\ ,1]$, alors :

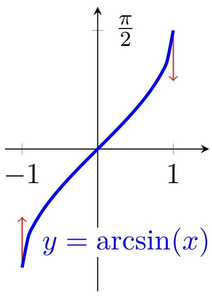
$$\boxed{\sin x = k \iff x = \arcsin k\ [2\pi] \text{ ou } \pi - \arcsin k\ [2\pi]}$$

Propriété IV.2.6

- arcsin est impaire et strictement croissante sur $[-1\,;\,1]$.
- arcsin est dérivable sur $]-1\,;\,1[$ et :

$$\boxed{\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}}$$

Preuve : même idée que pour arccos...



IV.2.3 Tangente et arctangente

♪ Définition IV.2.7

La fonction tan : $]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ admet une fonction réciproque, nommée "arctangente" et on a :

$$\boxed{\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[}$$

Propriété IV.2.8

On a :

$$\boxed{\forall y \in \mathbb{R},\ \tan\Big(\arctan(y)\Big) = y} \quad \text{et} \quad \boxed{\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[,\ \arctan\Big(\tan(x)\Big) = x}$$

Si $k \in \mathbb{R}$, alors :

$$\boxed{\tan x = k \iff x = \arctan k\ [\pi]}$$

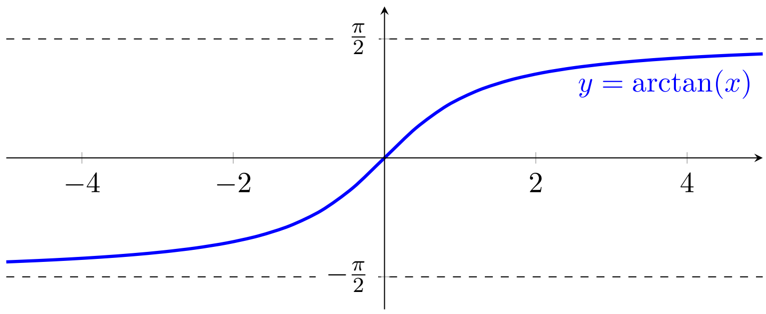
Propriété IV.2.9

- arctan est impaire et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\boxed{\arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}}$$

Preuve : La fonction $\tan'$ ne s'annule pas sur $]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}[$, donc arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus on a :

$$\arctan'(y) = \frac{1}{\tan'(\arctan y)} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan y)} = \frac{1}{1+y^2}$$



Voir la fiche bilan pour les représentations graphiques des fonctions de références...

☐ ✍ **Exercice K.19** ☐ ✍ **Exercice K.20** ☐ ✍ **Exercice K.21** ☐ ✍ **Exercice K.22** ☐ ✍ **Exercice K.23**