Planche J
Notion de fonction

☐ Exercice J1 (ensembles de définition)

Déterminer les ensembles de définition maximaux des fonctions suivantes :

$$f(x)=\frac{\sqrt{3x+5}}{x^2-1} \qquad g(x)=\ln\left(\frac{2x-4}{x-5}\right) \qquad h(x)=\ln(2x-4)-\ln(x-5) \qquad k(x)=\sqrt{x^2+x-2}$$

☐ Exercice J2 (opérations sur la courbe)

Q 1 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$ de représentation $\mathcal{C}_f$.
Expliquer comment obtenir la courbe des fonctions :

$$f_1 : x \mapsto f(x)+2 \qquad f_2 : x \mapsto f(x+2) \qquad f_3 : x \mapsto f(x-2) \qquad f_4 :\mapsto 2f(x)$$

Q 2 Comment obtenir les courbes représentatives de $g_1 : x \mapsto \sin(2x)$ et $g_2 : x \mapsto \sin(x+\frac{\pi}{2})$ à partir de la courbe de la fonction sin ? Plus généralement on peut déduire $x \mapsto \sin(\omega x+\varphi)$...

☐ Exercice J3 (opérations sur la courbe)

Sans calcul ni calculatrice, déterminer, en décrivant les transformations du plan opérées, donner l'allure des courbes représentatives des fonctions suivantes (*pour la dernière, travailler seulement sur une période)* :

$$f \;:\; x \mapsto \mathrm{e}^{4-x}+1 \qquad g \;:\; x \mapsto 2+\frac{1}{x+1} \qquad h \;:\; x \mapsto \frac{1}{2}\cos(x-\frac{\pi}{3})$$

☐ Exercice J4 (opérations sur la courbe)

Q 1 Soit $f : x \mapsto x^2-2x-1$. Trouver sa forme canonique, et en déduire la suite des transformations permettant de passer de la parabole usuelle à la courbe de f. Tracer l'allure de $\mathcal{C}_f$.

Q 2 même travail avec $g : x \mapsto -x^2-2x+3$.

☐ Exercice J5 (composition)

On pose $f(x)=\ln x$, $g(x)=\sqrt{x}-1$ et $h(x)=3x+7$. Déterminer l'ensemble de définition de $f\circ g\circ h$.

☐ Exercice J6

On souhaite connaître l'âge n de quelqu'un sans avoir à le lui demander directement.
On lui fait faire alors, à partir de son âge n ($n \in \mathbb{N}^*$), un petit calcul mental de notre choix (*via* une fonction f) et on lui demande le résultat obtenu $f(n)$. Voici le calcul demandé :

Enlevez 104 au carré de votre âge, rajoutez 104 à la valeur absolue du résultat.

Q 1 Donner l'expression la fonction f (définie mathématiquement sur $\mathbb{R}$).

Q 2 Écrire f comme une compositions de fonctions faisant intervenir uniquement la fonction carrée, la fonction valeur absolue et des fonctions affines.

Q 3 Pouvez-vous retrouver l'âge si le résultat du calcul fait 256, et si le résultat du calcul fait 144 ?

☐ Exercice J7 (parité)

Étudier la parité des fonctions suivantes (pensez à vérifier la symétrie des ensembles de définition) :

$$f_1(x)=x^2+2 \qquad f_2(x)=(x+2)^2 \qquad f_3(x)=x\cos(x) \qquad f_4(x)=\sqrt{2x^2-3} \qquad f_5(x)=\frac{1}{2-x}$$

□ Exercice J8 (encadrement)

Q 1 Soit f définie par $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+2x+1} + 1$. Après avoir étudié l'ensemble de définition de f, montrer que 2 est un majorant pour f. Est-ce un maximum ?

Q 2 Soit g définie par $g(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x}$. Après avoir étudié l'ensemble de définition de g, montrer que g est bornée par 0 et 1.

□ Exercice J9 (Travail sur la définition de croissance)

Q 1 On considère une fonction f définie sur I :

a. Donner la définition pour : f est croissante sur I.

b. En déduire l'assertion traduisant que f n'est pas croissante sur I.

c. Soit $f(x) = x^2$.
- Monter que f n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$.
- Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et décroissante sur $\mathbb{R}^-$.

Q 2 Montrer que g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_*^+$ et décroissante sur $\mathbb{R}_*^-$.
Est-elle décroissante sur $\mathbb{R}^*$?

Q 3 Soit h définie sur $\mathbb{R}$, par $h(x) = (x-2)^2 - 3$. Conjecturer sur quel intervalle elle est croissante, puis le démontrer à l'aide de la définition.

□ Exercice J10

On définit la fonction f par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1}$, et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

Q 1 Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f et les limites aux bords de $\mathcal{D}$. Y a-t-il des asymptotes ?

Q 2 **a.** Justifier que f n'est ni paire, ni impaire.

b. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Montrer que $f(-x) + f(x) = 1$. $\star$ En déduire une symétrie de la courbe $\mathcal{C}$.

Q 3 **a.** Peut-on écrire f sous forme d'une composée de fonctions ?
Dans le cas contraire, trouver une forme de f permettant de l'écrire comme une composée (*essayer de trouver une expression où le x n'apparait qu'une seule fois…*).

b. Sans calcul, dresser alors le tableau de variations de f.

□ Exercice J11 (nombre dérivé)

Soit $f(x) = -x^2 - x + 3$ et $g(x) = 4 - \mathrm{e}^x$. Montrer qu'il existe un $a \in \mathbb{R}$ tel que les tangentes à $\mathcal{C}_f$ et à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse a sont parallèles.

□ Exercice J12 (calcul de fonctions dérivées)

Étudier la dérivabilité, puis calculer la dérivée de :

$$x \mapsto \sqrt{1-2x^2}, \quad x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}}, \quad x \mapsto \frac{(3x+1)^4}{(1-2x)^4}$$

□ Exercice J13 (étude de fonctions)

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{2-\cos(x)}$.

Q 1 Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$.

Q 2 Est-il possible de réduire le domaine d'étude ? Si oui, à quel intervalle I ?

Q 3 Déterminer le domaine de dérivabilité $\Delta_f \subset I$ puis calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \Delta_f$.

Q 4 Étudier le signe de $f'(x)$ sur Δ_f.

Q 5 Dresser le tableau de variation de f sur I.

Q 6 Déterminer les valeurs maximales et minimales atteintes par f sur $\mathbb{R}$. En déduire la valeur maximale atteinte par $|f(x)|$ lorsque $x \in \mathbb{R}$.

Q 7 Donner les équations des tangentes aux points d'abscisses 0 et π.

Q 8 Tracer l'allure de sa courbe représentative sur $\mathcal{D}_f$.

□ Exercice J14 (étude de fonctions)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 6x^2 - 8x$.

Q 1 Dresser le tableau de variations de f *(La valeur de $f'(2)$ pourra éventuellement servir dans le raisonnement...)*

Q 2 La fonction f admet-elle un extremum ?

□ Exercice J15 (étude de fonctions)

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + 4$ et g la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$.
Démontrer que dans un repère les courbes représentatives de f et de g ont une tangente commune. *(Faire une conjecture à partire de Geogebra et la démontrer...)*

□ Exercice J16

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

Q 1 Calculer $f(\mathrm{e})$, $f(1/\mathrm{e})$, $f(\sqrt{\mathrm{e}})$ et $f(\mathrm{e}^2)$.

Q 2 Étudier les limites de f en 0 et en $+\infty$.

Q 3 Calculer la dérivée de la fonction f, puis construire le tableau de vaiation de f.

Q 4 Donner une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

□ Exercice J17 (étude de fonctions)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$par $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

Q 1 Étudier la parité de la fonction f.

Q 2 Étudier la limite de f en $+\infty$. En donner une interprétation graphique.

Q 3 Calculer $f'(x)$ et en déduire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}^+$.

Q 4 Déterminer l'équation réduite de la tangente T_0 à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

Q 5 Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T_0.

Q 6 Construire $\mathcal{C}_f$, ses asymptotes et ses tangentes connues.

Q 7 Démontrer que les tangentes à $\mathcal{C}_f$ en deux points d'abscisses opposées sont parallèles.

□ Exercice J18 (étude de fonctions)

Q 1 Soit la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x - \ln(x)$.
Étudier les variations de g pour en déduire que : $\forall x > 0,\ g(x) \geqslant 1$.

Q 2 On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x - \ln x}$.

- **a.** Justifier que $\mathcal{D}_f =]0;+\infty[$.
- **b.** Étudier les limites de f en 0 et en $+\infty$.
- **c.** Étudier le sens de variation de f et construire son tableau de variation.
- **d.** Soit $A(0;-1)$. Pour tout $x > 0$, on considère le point $M(x; f(x))$.
Déterminer le coefficient directeur de la droite (AM) en fonction de x, puis sa limite lorsque x tend vers 0. Interpréter graphiquement le résultat.
- **e.** Construire $\mathcal{C}_f$ dans le plan muni d'un repère orthogonal.

□ Exercice J19 (bijection)

Soit f définie par $f(x) = x^2 - 2x + 3$ pour tout $x \in I =]-\infty, 1]$.

Q 1 Montrer à l'aide de la propriété liée à la stricte monotonie que f réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer.

Q 2 Montrer à l'aide de la définition que f réalise une bijection de I sur J et expliciter la fonction réciproque f^{-1}.

□ Exercice J20 (bijection et réciproque)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

Q 1 Justifier que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à expliciter.

Q 2 Pour $x \in]-1; 1[$, on pose $g(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. Calculer $g \circ f$ et $f \circ g$. Que peut-on en conclure?

Q 3 Pour tout $y \in J$, résoudre $f(x) = y$ (et retrouver g !).

□ Exercice J21 (bijection et dérivée)

Soit $f(x) = x^3 + x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$.

Q 1 Calculer $f(x)$ pour $x \in \{-1, 0, 1, 2\}$.

Q 2 Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle J à déterminer.

Q 3 Déterminer $(f^{-1})'(y)$ pour tout $y \in J$.

Q 4 Calculer $(f^{-1})'(y)$ pour $y \in \{-1, 1, 3, 11\}$

Q 5 Tracer f et f^{-1} dans un repère orthonormé.

□ Exercice J22 (bijection et dérivée)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5 + x^3 + 1$.

Q 1 Montrer que f est bijective et déterminer $J = f(\mathbb{R})$.

Q 2 Sur quel intervalle J', la fonction réciproque f^{-1} est-elle dérivable ? Déterminer l'expression de $(f^{-1})'$.

□ Exercice J23 (bijection)

Soit f la fonction définie sur $I =]-\infty; -1[$ par $f(x) = \ln\left(x^2 - 2x - 3\right)$.

Q 1 Étudier les variations de f.

Q 2 Montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on déterminera.

Q 3 Calculer alors $f^{-1}(\ln(5))$ et $\left(f^{-1}\right)'(\ln(5))$.

□ Exercice J24

On définit la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2}{2} - 2x + \ln x$.

Q 1 Étudier la bijectivité de f.

Q 2 Le cas échéant, étudier la dérivabilité et les variations de sa fonction réciproque.

□ Exercice J25

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$.

Q 1 Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f et étudier sa parité.

Q 2 Étudier les variations de f et préciser ses limites aux bornes de $\mathcal{D}$.

Q 3 Justifier que la restriction de f à l'intervalle $[0; +\infty[$ admet une application réciproque que l'on notera g.

Q 4 Donner l'ensemble de défintion de g ainsi que son sens de variations.

Q 5 Dessiner l'allure des fonctions $f$et g.

Q 6 $\star$ Expliciter la fonction g.

TD : à propos d'extremums

On rappelle les définitions suivantes pour une fonction f définie sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$:

- f est **majorée** si :
  $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathcal{D},\ f(x) \leqslant M$
- f est **minorée** si :
  $\exists m \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathcal{D},\ f(x) \geqslant m$
- f est **bornée** si :
  $\exists B \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathcal{D},\ |f(x)| \leqslant B$
- f admet un **maximum** sur $\mathcal{D}$ si :
  $\exists a \in \mathcal{D},\ \forall x \in \mathcal{D},\ f(x) \leqslant f(a)$
- f admet un **minimum** sur $\mathcal{D}$ si :
  $\exists a \in \mathcal{D},\ \forall x \in \mathcal{D},\ f(x) \geqslant f(a)$
- f admet un **extremum** sur $\mathcal{D}$ si elle admet soit un maximum, soit un minimum (soit les deux).

En d'autre termes, une fonction f admet un maximum s'il existe un majorant atteint.

□ Exercice J26

Q 1 Montrer que :
« Une fonction est bornée si et seulement si elle est à la fois majorée et minorée. »

Q 2 Écrire une assertion exprimant que $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ n'est pas majorée.

Q 3 Si f et g sont deux fonctions bornées, que dire de $f+g$ et de fg ?

Q 4 Si f et g sont deux fonctions majorées, que dire de $f+g$ et de fg ?

□ Exercice J27

Q 1 Donner une assertion exprimant que f ne possède pas de minimum.

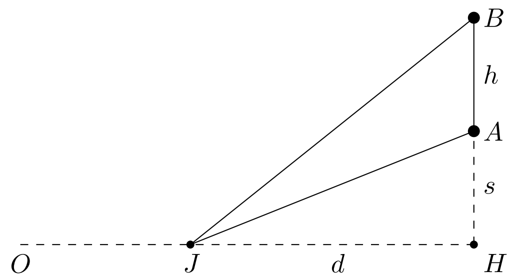
Q 2 Donner une fonction minorée sans minimum.

Q 3 Sans dériver, donner les extremums éventuels de $f : x \mapsto x^2 - 2x - 5$

Q 4 Discuter sur les extremums éventuel de $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.

□ Exercice J28

Sur un terrain de rugby, le joueur J doit transformer la pénalité et envoyer le ballon entre les poteaux A et B. Il peut se placer où il veut sur la droite (OH) de sorte que la distance $d = JH$ soit supérieure à 22 m. À quelle distance d doit-il se positionner afin que l'angle de visée $\alpha = \widehat{AJB}$ soit maximal.
AN: h=5,6m et s=32m

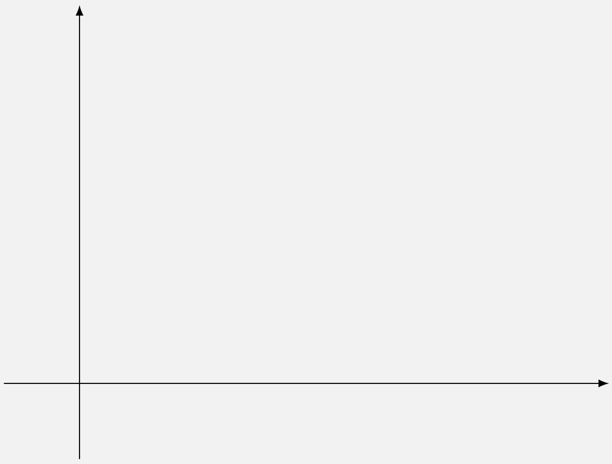


TD : APPROXIMATIONS AFFINES

Lorsque l'on étudie un phénomène en fonction d'un paramètre, on n'a pas toujours besoin d'étudier la fonction sur son ensemble de définition maximal, mais parfois seulement localement *au voisinage* d'un certain point. De plus, dans ce cas, si la fonction considérée n'est pas simple, il est souvent bien pratique d'approximer, dans un premier temps, cette fonction par une fonction affine. Graphiquement, cela revient à approximer sa courbe représentative par sa tangente.

On considère un intervalle I de $\mathbb{R}$, un réel $a \in I$, une fonction f définie sur I, dérivable en a et on note $\mathcal{C}_f$ sa représentation graphique.

Croquis :



$\rightarrowtail$ **Interprétation en terme de tangente :** la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point de coordonnées $A(a; f(a))$ a pour équation :

$$\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$

$\rightarrowtail$ **Interprétation en termes d'approximation affine :** la meilleure approximation affine de f au voisinage de a est la fonction affine g définie par :

$$g(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$$

que l'on préfère souvent écrire :

$$\boxed{g(a+h) = f'(a)h + f(a) \underset{0}{\approx} f(a+h)}$$

□ Exercice J29

On considère la fonction

$$f(x) = e^{3x+1} + 3e^{x} - 5$$

Q 1 Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

Q 2 Déterminer la meilleure approximation affine de f au voisinage de $x = 1$.

☐ Exercice J30

Un coureur à pied souhaite pouvoir estimer ses temps de passages (en secondes) au 100m en fonction de sa vitesse (exprimée en km/h).

Q 1 Vérifier que cette fonction est : $f(x) = \dfrac{360}{x}$

Q 2 Déterminer le temps de passage pour une vitesse de 19km/h.

Q 3 Déterminer la *meilleure approximation affine* de f au voisinage de 19km/h.

Q 4 En supposant cette approximation acceptable pour 17km/h, donner (de tête !) le temps de passage au 100m pour une vitesse de 17km/h.

☐ Exercice J31 (À propos de crédit)

Le principe d'un crédit est d'obtenir de la part d'un créancier (une banque en général) une somme d'argent S_1 dont on a besoin à un instant t. On s'engage bien entendu à rembourser cette somme, progressivement au cours du temps. Mais ce service n'est bien évidemment pas gratuit (et c'est normal), ce qui signifie que la somme S_2 que l'on remboursera sera supérieure à la somme S_1 que l'on nous a prêtée. On appelle alors *coût du crédit*, la différence entre S_2 et S_1, c'est à dire en quelque sorte, le prix du service... (en réalité, c'est un peu plus compliqué, mais bon...)
Prenons ici l'exemple d'un prêt immobilier. La fonction f qui donne le coût d'un crédit de S_1 euros, échelonné sur une période de n mensualités en fonction du taux annuel $t\%$ est donnée par la formule ci-dessous :

$$S_2 - S_1 = f(t) = S_1 \times \left[\frac{\left(1 + \frac{t}{1200}\right)^n \times \frac{nt}{1200}}{\left(1 + \frac{t}{1200}\right)^n - 1} - 1 \right]$$

Il est important de noter que dans ce contexte, la variable t ne varie que très peu, disons par exemple autour de 2. Ce qui permet d'approximer cette fonction pour le moins compliquée par son approximation affine au voisinage de $t = 2$.

Q 1 Donner l'expression de la meilleure approximation affine de f au voisinage de 2.
Il reste à calculer $f(2)$ et $f'(2)$!

Q 2 Notons $g(t) = \dfrac{t}{1200}$ et $h(x) = S_1 \times \left[\dfrac{nx\,(1+x)^n}{(1+x)^n - 1} - 1 \right]$. On a ainsi $f = h \circ g$.
Donner une expression de $f'(t)$.

Q 3 Dans le cas concret où $S_1 = 200\,000$ euros et $n = 300$ mois, donner les valeurs arrondies à l'euro près de $f(2)$ et $f'(2)$, puis reporter dans l'expression de la meilleure approximation affine.

Q 4 Vous êtes en train de négocier avec votre banquier. Calculer alors (de tête ou presque...) quel sera votre *gain* si vous arrivez à faire baisser le taux de 0,1 %, et 0,2 % ?