

Q9 corrections

file 7 :

étude de fonctions

[Exo 5]

$$* f(x) = e^{4-x} + 1$$

À partir de la courbe représentant la fonction : $x \mapsto e^x$

- symétrie par rapport à l'axe $x = \frac{4}{2} = 2$

puis • translation de vecteur $\vec{1} \vec{f}$

$$* g(x) = 2 + \frac{1}{x+1}$$

À partir de la courbe représentant la fonction : $x \mapsto \frac{1}{x}$

- translation de vecteur $-\vec{e}$

puis • translation de vecteur $2\vec{j}$

$$* h(x) = \frac{1}{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right).$$

Décaler la courbe de $\cos x$ de $\frac{\pi}{3}$ vers la droite,
puis comprimer verticalement en divisant par 2.

$$(J_4) \quad f(x) = x^2 - 2x - 1 = (x-1)^2 - 2$$

À partir de la courbe de la fonction canonique :

- translation de $\vec{1x}$
- puis translation de $-\vec{2f}$

Q2

$$\begin{aligned}
 g(x) &= -(x^2 + 2x) + 3 \\
 &= -((x+1)^2 - 1) + 3 \\
 &= -(x+1)^2 + 4
 \end{aligned}$$

À partir de la courbe $y = x^2$:

- translation de $-\vec{x}$
- puis symétrie par rapport à (Ox)
- puis translation de $\vec{4f}$

(J9) Q1 et Q2 en classe.

Q3 On peut conjecturer que f est $\nearrow$ sur $[2; +\infty[$.

Preuve: soit x_1 et x_2 dans $[2; +\infty[$.

on suppose $x_1 < x_2$.

comparons $f(x_1)$ et $f(x_2)$:

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= (x_1 - 2)^2 - 3 - (x_2 - 2)^2 + 3 \\ &= (x_1 - 2)^2 - (x_2 - 2)^2 \\ &= (x_1 - 2 + x_2 - 2)(x_1 - 2 - (x_2 - 2)) \\ &= \underbrace{(x_1 - 2 + x_2 - 2)}_{\substack{(+)\text{ car } x_1 \text{ et } x_2 > 2}} \underbrace{(x_1 - x_2)}_{(-)\text{ car } x_1 < x_2} \end{aligned}$$

donc $f(x_1) - f(x_2) \leq 0$

donc $f(x_1) \leq f(x_2)$

(ip)

$f \nearrow$ sur $[2; +\infty[$

$$(710) \quad f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$$

Q1 • f existe lorsque $e^x - 1 \neq 0$.

or $e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

d'où $\mathcal{D}f = \mathbb{R}^*$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{0}{-1} = 0$ asymptote horiz: $y = 0$

* en $+\infty$: $f(x) = \frac{e^x}{e^x(1 - e^{-x})} = \frac{1}{1 - e^{-x}}$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ asymptote horiz $y = 1$.

* en 0^- : $e^x - 1 \rightarrow 0^-$

d'où $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} -\infty$

asympt. vert $x = 0$

* en 0^+ : $e^x - 1 \rightarrow 0^+$

d'où $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$

asympt. vert $x = 0$

TD Q2a.

$$f(1) = \frac{e}{e-1} \quad f(-1) = \frac{e^{-1}}{e^{-1}-1} = \frac{1}{e(e^{-1}-1)} = \frac{1}{1-e}$$

donc $f(-1) \neq f(1)$ et $f(-1) \neq -f(1)$

donc f ni paire, ni impaire.

Q2b. $f(-x) + f(x) = \frac{e^{-x}}{e^{-x}-1} + \frac{e^x}{e^x-1}$

$$= \frac{e^{-x}(e^x-1) + e^x(e^{-x}-1)}{(e^{-x}-1)(e^x-1)} = \frac{1 - e^{-x} + 1 - e^x}{1 - e^{-x} - e^x + 1} = 1$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{f(x) + f(-x)}{2} = \frac{1}{2}$

Ainsi, $\forall x$, le milieu de $\Pi_1(x, f(x))$ et de $\Pi_2(-x, f(-x))$ est le point $I(0, \frac{1}{2})$.

(ie) f symétrique par rapport à $I(0, \frac{1}{2})$

Q3a . Pas évident sous cette forme.

Donc on a: $f(x) = \frac{e^x}{e^x(1-e^{-x})} = \frac{1}{e^x - 1}$

ce qui donne la décomposition:

$$x \xrightarrow[\substack{\text{exp} \\ f_1(x) = e^x}]{}, e^x \xrightarrow[\substack{\text{affine} \\ f_2(x) = x-1}]{}, e^x - 1 \xrightarrow[\substack{\text{inverse} \\ f_3(x) = \frac{1}{x}}]{}, f(x)$$

$$f(x) = f_3 \circ f_2 \circ f_1(x)$$

Q3b * Si $x \in \mathbb{R}^{++}$: $f_1: \mathbb{R}^{++} \rightarrow]1; +\infty[$ ↗

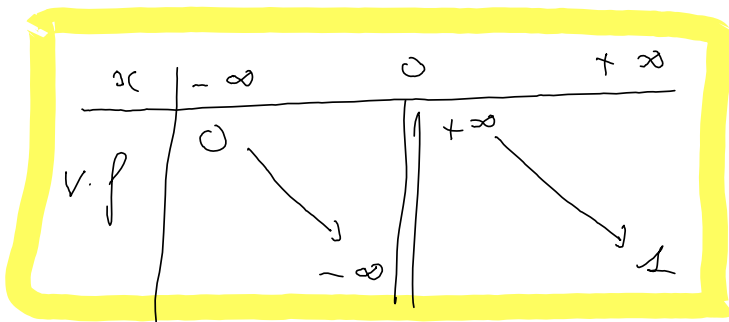
$f_2:]1; +\infty[\rightarrow]0; +\infty[$ ↗

$f_3:]0; +\infty[\rightarrow]0; +\infty[$ ↘

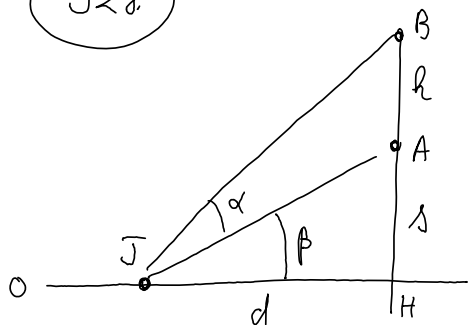
par composition f est ↘ sur $\mathbb{R}^{++}$.

* $\hat{f}$ chste sur $\mathbb{R}^{--}$.

D'où



J28



$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{h+s}{d} = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

Donc $\frac{h+s}{d} \left(1 - \tan \alpha \frac{s}{d} \right) = \tan \alpha + \frac{s}{d}$

$$\frac{h+s}{d} - \tan \alpha \left(\frac{h+s}{d} \times \frac{s}{d} + 1 \right) = \frac{s}{d}$$

$$\tan \alpha = \left(\frac{h+s}{d} - \frac{s}{d} \right) \times \frac{d^2}{s(h+s) + d^2}$$

$$\tan \alpha = \frac{hd}{s(h+s) + d^2}$$

Puisque la fonction $\tan$ est $\nearrow$, α et $\tan \alpha$ ont même variation. Étudions donc le max de $\tan \alpha$.

Notons $f(d) = \frac{h \cdot d}{s(s+h) + d^2}$

$$f'(d) = \frac{h(s(s+h) + d^2) - 2hd^2}{(\quad)^2}$$

$$= \frac{-hd^2 + sh(s+h)}{(\quad)^2} = \frac{h}{(1)^2} (s(s+h) - d^2)$$

On a:

$$f'(d) \geq 0 \Leftrightarrow s(s+h) - d^2 \geq 0 \quad (\text{car } h > 0)$$

$$\Leftrightarrow d^2 \leq s(s+h)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq d \leq \sqrt{s(s+h)}$$

D'où

	d	0	$\sqrt{s(s+h)}$	$+\infty$
$s.f'$		+	0	-
$v.f'$		↗ ↘		

Les variations de α étant les m, on déduit que α est maximal lorsque $d = \sqrt{s(s+h)}$.

A.N: $d = \sqrt{32 \times 37,6} \approx 34,7 \text{ m}$