Planche I
Trigonométrie

☐ Exercice I1

Donner la mesure principale des angles orientés dont une mesure est :

$$\frac{19\pi}{2} \qquad \frac{25\pi}{6} \qquad \frac{-81\pi}{4} \qquad \frac{-37\pi}{3}$$

☐ Exercice I2

Compléter les égalités suivantes :

Q 1 $\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Q 2 $\cos\left(\frac{19\pi}{3}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Q 3 $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Q 4 $\sin\left(\frac{19\pi}{6}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Q 5 $\cos\left(\frac{21\pi}{6}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Q 6 $\cos\left(\frac{43\pi}{4}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

☐ Exercice I3

Simplifier les expressions suivantes dans lesquelles x désigne un réel quelconque:

Q 1 $\sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

Q 2 $\sin(x + \pi) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(-x)$

Q 3 $\sin(x - \pi) + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

Q 4 $\sin(\pi - x) + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

☐ Exercice I4

Q 1 En remarquant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, donner des valeurs exactes pour $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Q 2 Essayer une technique analogue pour $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

☐ Exercice I5

Calculer $\cos(2x)$ dans chacun des cas suivants : **a.** $\cos(x) = \frac{-1}{3}$ et **b.** $\sin(x) = \frac{-\sqrt{3}}{3}$.

☐ Exercice I6

Q 1 Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Q 2 Soit $x \in [0; \pi]$, exprimer $\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ en fonction de $\cos(x)$.

Q 3 Écrire un algorithme qui donne $\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)$ pour $n \in \mathbb{N}$ si l'on connait $\cos(x)$.

☐ Exercice I7

Calculer $\int_0^\pi \cos^2(x)dx$ et $\int_0^\pi \sin^2(x)dx$

☐ Exercice I8

Pour $x \in \mathbb{R}$, écrire les expressions suivantes sous la forme d'un seul cosinus :

Q 1 $f(x) = \sqrt{3}\cos(3x) - \sin(3x)$

Q 2 $f(x) = \cos(2x) - \sqrt{3}\sin(2x)$

Q 3 $f(x) = \cos(x) + \sin(x)$

Q 4 $f(x) = 3\cos(5x) + \sqrt{3}\sin(5x)$

☐ Exercice I9

Transformer la somme suivante en produit : $S = \sin(x) + \sin(3x) + \sin(7x) + \sin(9x)$
(Indication : $1 + 9 = 7 + 3$)

☐ Exercice I10

Montrer que : $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = \sin(2x)\Big(2\cos(x) + 1\Big)$

☐ Exercice I11

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

Q 1 $\cos(x) = \frac{1}{2}$

Q 2 $\sin(3x + \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Q 3 $2\cos(3x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$

Q 4 $\sin(2x - \frac{\pi}{4}) = \cos(x + \frac{\pi}{6})$

Q 5 $\cos(x) = \sin(x)$

Q 6 $\cos^2(x) = \frac{1}{2}$

☐ Exercice I12

On admettra (pour l'instant) que pour tout $y \in \mathbb{R}$ l'équation (E) : $\tan(x) = y$ admet des solutions dans $\mathbb{R}$. De plus, il en existe une et une seule dans l'intervalle ouvert $I_0 = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, que l'on appelle *arc tangente de* y.

Q 1 Visualiser ce résultat sur le cercle trigo.

Q 2 Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a. $\tan x = 1$

b. $\tan x = \sqrt{3}$

c. $\sin x - \frac{1}{\sqrt{3}}\cos x = 0$

☐ Exercice I13

Transformer les équations suivantes en des équations trigonométriques que vous savez résoudre :

Q 1 $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{x}{3}\right)$

Q 2 $\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) = -1$

Q 3 $\cos(3x) = \sin(2x)$

Q 4 $\cos^2(x) - \sin^2(x) = \sin(4x)$

Q 5 $\cos(2x) - \sqrt{3}\sin(2x) = -\sqrt{2}$

Q 6 $\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = \sqrt{3}$

Q 7 $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = 0$
(indic : revoir exercice I10)

☐ Exercice I14

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$ puis représenter les solutions comprises entre $[-\pi; \pi[$.

Q 1 $\dfrac{\cos(x) - \cos(3x)}{\sin(x)} = 2\cos(x)$ *(Penser factorisation du cosinus...)*

Q 2 $\tan^2(x) - 3\dfrac{\tan(x)}{\cos(x)} - \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1$ *(Trouver une formule liant* $\tan^2$ *et* $\cos^2$*...)*

□ Exercice I15

On considère l'équation :

$$(E) \quad 4\cos^2(x) + 2\left(\sqrt{3}-1\right)\cos(x) - \sqrt{3} = 0$$

On va envisager deux méthodes pour résoudre cette équation :

Q 1 Méthode 1 :

- **a.** Montrer que $(E) \iff \left(2\cos x + \sqrt{3}\right)(2\cos x - 1) = 0$
- **b.** En déduire toutes les solutions de (E).

Q 2 Méthode 2 :

- **a.** Poser $X = \cos x$ et montrer que x est solution de (E) si et seulement si X est solution d'une équation du second degré de discriminant $\Delta = 4(4+2\sqrt{3})$.
- **b.** En déduire que X vaut soit $X_1 = \frac{1-\sqrt{3}+\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{4}$ soit $X_2 = \frac{1-\sqrt{3}-\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{4}$
- **c.** Montrer $4X_1 = 2$ et que $4X_2 = -2\sqrt{3}$.
- **d.** En déduire toutes les solutions de (E).

□ Exercice I16

Résoudre **à l'aide d'une lecture sur le cercle trigonométrique**, chacune des inéquations suivantes dans l'intervalle indiqué :

Q 1 $\cos(x) \geqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ sur $I = [-\pi;\pi]$.

Q 2 $\cos(x) \geqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ sur $I = [0;2\pi]$.

Q 3 $\cos(x) \geqslant \sin(x)$ sur $I = \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Q 4 $\sin(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$ sur $I = [0;4\pi]$.