CHAPITRE

$\mathscr{I}$

TSI[1]

Lycée Artaud

2025/2026

Trigonométrie

Sommaire

I Notion de radians

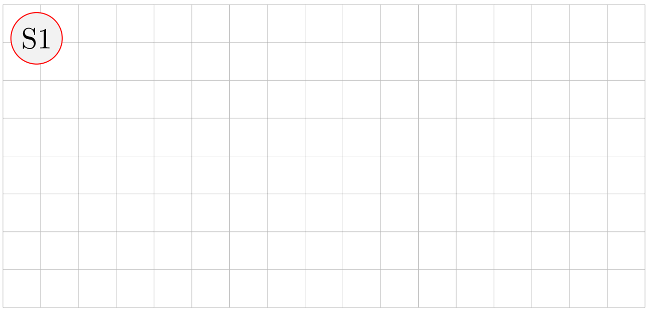
I.1 Cercle trigonométrique

Définition I.1.1

C'est le cercle de centre O et de rayon 1, orienté positivement dans le sens anti-horaire.

Question : comment repérer un point M sur le cercle trigonométrique ?
Réponse :

- Par un couple de coordonnées $M(x, y)$
- Par l'angle $\widehat{AOM}$,
- Par une distance d parcourue sur le cercle à partir d'un point A « origine » jusqu'au point M.



C'est le lien entre ces notions qui va nous occuper pendant (le début de) ce chapitre.

I.2 Association d'un réel et d'un point sur le cercle trigonométrique

Propriété I.2.1

Chaque réel x repère un **unique** point M sur le cercle trigonométrique. Cela définit ainsi un unique angle $A\overset{\frown}{O}M$. On parle d'angle orienté (de A vers M).
Ce réel x est appelé **une mesure en radians** de l'angle orienté $\widehat{\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}\right)}$.

Remarque : Lorsque x parcourt l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$, le point M parcourt le cercle en entier. Donc, nécessairement, plusieurs réels x peuvent repérer le même point M (C'est le principe des tiroirs !).

Propriété I.2.2

Si M est un point du cercle trigonométrique, plusieurs réels peuvent repérer ce point. De plus, si on en connaît un, x, alors on les connaît tous : $x + 2\pi$, $x - 2\pi$, $x + 4\pi$, $x - 4\pi$ etc.

Conclusion : un réel x repérant un point M sur le cercle trigonométrique est appelé **une** mesure en **radians** de l'angle orienté $\widehat{\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}\right)}$.

R1 Un angle orienté mesuré par x est aussi mesuré par $x + 2\pi$, $x - 2\pi$, $x + 2k\pi$ avec k entier relatif. (Un même angle possède plusieurs mesures en radians !)

R2 **La** mesure dans l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$ est appelé la **mesure principale**.

R3 Une mesure en radians d'un angle orienté $\widehat{\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}\right)}$ n'est rien d'autre qu'une longueur (algébrique) du chemin menant de A à M sur le cercle de rayon 1.

Olivier BRÉBANT
Lycée Artaud – 2025/2026

I.3 Quelques points remarquables

On retiendra par cœur les valeurs suivantes :

Degrés	0	30	45	60	90
Radians	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$

C'est un tableau de proportionnalité, et on passe de la ligne « degrés » à la ligne « radians » en multipliant par $\dfrac{\pi}{180}$

Graphiquement :

S2

Et on retrouvera toutes les autres valeurs par symétrie.

☐ ✍ **Exercice I.1**

II Cosinus, sinus et tangente d'un réel

II.1 Rappels dans le triangle rectangle

Donner dans le triangle ABC rectangle en B les expressions de $\cos(A)$, $\sin(A)$ et $\tan(A)$:

S3

II.2 Cos/sin/tan d'un réel

On a vu au début du chapitre que pour un réel t on pouvait associer un unique point M sur le cercle, qui lui peut être repéré par ses coordonnées cartésiennes.

♪ Définition II.2.1

Soit t un nombre réel et $M(t)$ le point (unique) du cercle trigonométrique associé à t. Dans le repère $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$:

- l'abscisse du point M est le **cosinus** du réel t, noté $\cos(t)$;
- l'ordonnée du point M est le **sinus** du réel t, noté $\sin(t)$.
- L'ordonnée du point M' est la **tangente** du réel t, noté $\tan(t)$.

S4

Remarques – On peut vérifier que pour un point dans le premier quadrant les définitions correspondent à celles vues dans le triangle rectangle…

Propriété II.2.2 (Propriété fondalentale)

On a pour tout réel t :

$$\boxed{\cos^2 t + \sin^2 t = 1}$$

Propriété II.2.3 (Immédiates)

On a pour tout réel t :

$$-1 \leqslant \cos t \leqslant 1 \quad \text{et} \quad -1 \leqslant \sin t \leqslant 1$$

$$\cos(t+2\pi) = \cos(t) \quad \text{et} \quad \sin(t+2\pi) = \sin(t)$$

Propriété II.2.4 (Symétries)

On a pour tout réel t :

$\cos(-t) = \dots\dots\dots\dots$	$\sin(-t) = \dots\dots\dots\dots$
$\cos(t \pm \pi) = \dots\dots\dots\dots$	$\sin(t \pm \pi) = \dots\dots\dots\dots$
$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + t\right) = \dots\dots\dots\dots$	$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + t\right) = \dots\dots\dots\dots$
$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) = \dots\dots\dots\dots$	$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) = \dots\dots\dots\dots$

Propriété II.2.5 (Valeurs remarquables)

On retiendra par cœur :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
mesure en degrés	0	30	45	60	90
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Preuve

En utilisant des triangles isocèles et équilatéral, retrouver les valeurs exactes de :

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \quad \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \quad \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \quad \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

Retrouvons par exemple cos et sin de $\frac{\pi}{4}$:

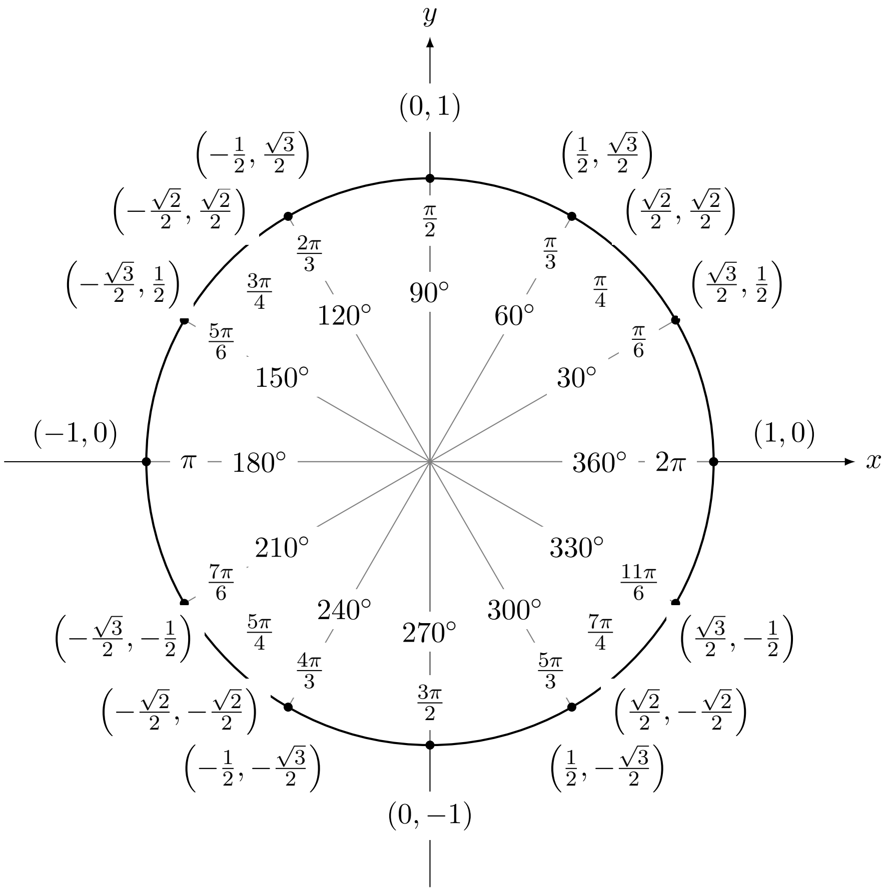
S5

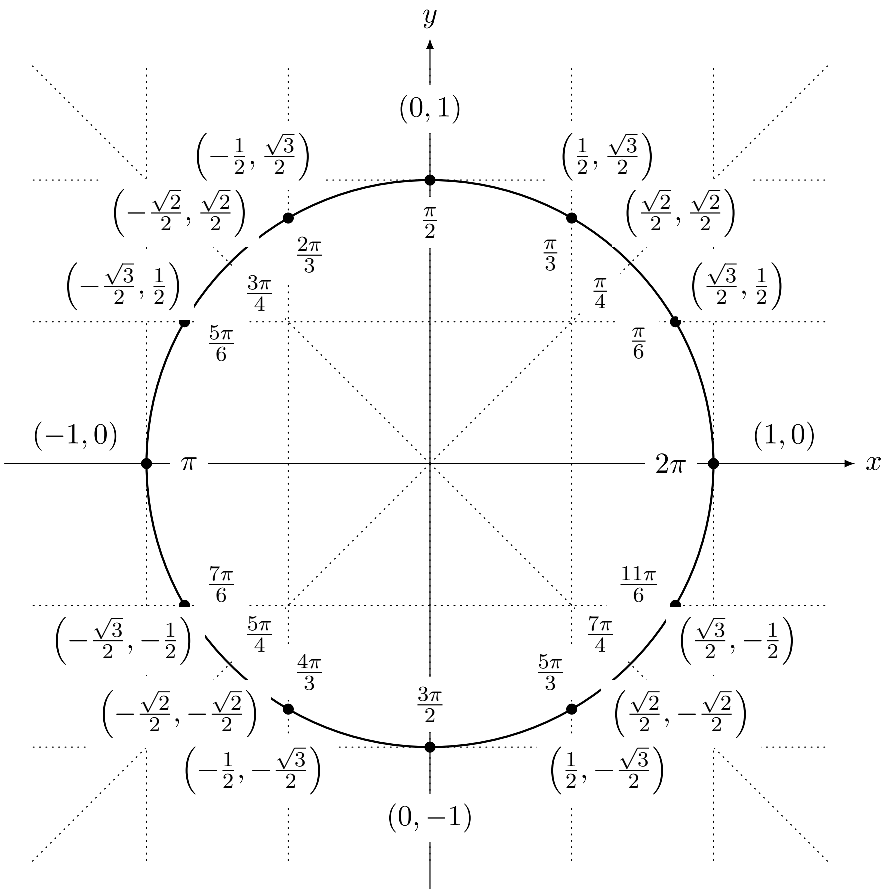
□

Toutes les autres valeurs remarquables se retrouveront par des raisonnements de symétrie...

☐ ✍ **Exercice I.2** ☐ ✍ **Exercice I.3**

II.3 Cercle trigonométrique : valeurs remarquables





Olivier **BRÉBANT**
Lycée Artaud – 2025/2026

III Transformations algébriques

Dans tout ce qui va suivre, a, b, p et q désignent 4 réels quelconques.

III.1 Formules d'additions

Propriété III.1.1 (addition)

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \quad | \quad \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

Exemple (III.1.2)

Retrouver les formules suivantes :

Q 1 $\sin(a-b) =$ ....

Q 2 $\cos(a-b) =$ ....

Q 3 Montrer que : $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$

S6

☐ ✍ **Exercice I.4**

Dans le cas particulier où $a = b$ les formules d'additions donnent :

Propriété III.1.3 (duplication)

- $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$
- $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$

Et on en déduit des formules de **linéarisation** :

Propriété III.1.4 (linéarisation)

$$\cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2} \quad | \quad \sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2}$$

☐ ✍ **Exercice I.5** ☐ ✍ **Exercice I.6** ☐ ✍ **Exercice I.7**

Propriété III.1.5

Pour tous réels a, b et ω, il existe deux réels A et φ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

Preuve

Idée de preuve : forcer la factorisation par $A = \sqrt{a^2+b^2}$... □

☐ ✍ **Exercice I.8**

III.2 Formules de factorisation

Propriété III.2.1 (factorisation)

- $\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
- $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
- $\sin(p) - \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$
- $\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

Preuve

Ces formules transforment les sommes en produits. Prouvons par exemple la première :

S7

□

☐ ✍ **Exercice I.9** ☐ ✍ **Exercice I.10**

IV (In)équations trigonométriques

IV.1 Équations trigonométriques

Les seules équations trigonométriques que l'on saura résoudre devront se ramener à une forme du type :

$$\cos x = a \quad \text{ou} \quad \sin x = a \quad \text{ou} \quad \tan x = a$$

où a est un réel fixé (de préférence une valeur remarquable) et x est l'inconnue.

Propriété IV.1.1

Pour tout a et b dans $\mathbb{R}$:

$$\boxed{\cos a = \cos b \iff \begin{cases} b = a + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ b = -a + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}} \qquad \boxed{\sin a = \sin b \iff \begin{cases} b = a + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ b = \pi - a + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}}$$

Pour tout a et b réels différents de $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$:

$$\boxed{\tan a = \tan b \iff a = b + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}}$$

☐ ✍ **Exercice I.11** ☐ ✍ **Exercice I.12** ☐ ✍ **Exercice I.13** ☐ ✍ **Exercice I.14**
☐ ✍ **Exercice I.15**

IV.2 Inéquations trigonométrique

Pour résoudre des inéquations, le problème est un peu plus délicat. On ne cherchera pas de rigueur excessive et on se contentera de s'appuyer fortement sur le cercle trigonométrique pour déterminer les solutions…

☐ ✍ **Exercice I.16**