

PLANCHE H

RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE

Exercice H1

On considère la suite (w_n) définie par :

$$\begin{cases} w_{n+1} = w_n^2 - 2n + 1 \\ w_0 = 2 \end{cases}$$

Calculer les 4 premiers termes des la suite (w_n) puis écrire une fonction Python "w(n)" qui renvoie la liste des termes w_0, \dots, w_n . (signature `w(n : int) -> list`)

Exercice H2 (avec égalité)

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n} \\ u_0 = 2 \end{cases}$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n = \frac{2}{2n+1}$.

Exercice H3 (avec égalité)

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - 1 \\ u_0 = 3 \end{cases}$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n = 2^{n+1} + 1$.

Exercice H4 (avec égalité)

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 1 \\ u_0 = 0 \end{cases}$

Conjecturer l'expression générale de cette suite (penser aux puissances de 2...), puis la démontrer.

Exercice H5 (avec égalité)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 5$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n = n^2 + 4n + 2$.

Exercice H6 (avec égalité)

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{5u_n + 3}{u_n + 3}$

Q1 Calculer u_1 et u_2 puis émettre une conjecture sur u_n .

Q2 Démontrer cette conjecture par récurrence.

Exercice H7 (avec inégalité)

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{9}{6-u_n} \\ u_0 = 0 \end{cases}$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $0 < u_n < 3$.

Exercice H8 (avec inégalité)

On considère la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1+2u_n}{1+u_n} \\ u_0 = 0 \end{cases}$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq u_n \leq 2$.

Exercice H9 (avec inégalité)

Démontrer qu'à partir d'un certain rang n_0 à déterminer on a : $\forall n \geq n_0, \quad 100n \leq 2^n$.

Exercice H10 (avec inégalité)

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a $(1+\pi)^n \geq 1+n\pi$

Exercice H11 (avec inégalité)

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.

Exercice H12 (avec inégalité)

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 2$ on a $4^n \geq 4n + 1$.

Exercice H13 (avec inégalité)

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 6$, $2^n > 3n + 1$.

Exercice H14 (avec inégalité)

On considère la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

Montrer que (u_n) est croissante.

Exercice H15 (avec inégalité)

On considère la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n} \\ u_1 = 1 \end{cases}$$

Montrer que (u_n) est croissante.

Exercice H16 (avec inégalité)

On considère la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + \frac{n}{3} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$
.

Montrer que (u_n) est croissante.

Exercice H17

Q1 Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $4^n - 1$ est divisible par 3.

Q2 a. Montrer que la proposition suivante est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

« Si $4^n + 1$ est un multiple de 3 alors $4^{n+1} + 1$ aussi »

b. Que pensez-vous de la divisibilité par 3 de $4^n + 1$?

□ Exercice H18

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $10^n - 1$ est un multiple de 9.

□ Exercice H19

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, 6 divise $5n^3 + n$.

□ Exercice H20 (Nombre triangulaires)

Q1 Démontrer par récurrence la formule que l'on connaît d'ailleurs par cœur :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad T_n = \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Pour information, T_n est appelé le $n^{ième}$ *nombre triangulaire*, car on peut le représenter par des triangles :



Q2 Sans faire de récurrence, déduire que : $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$.

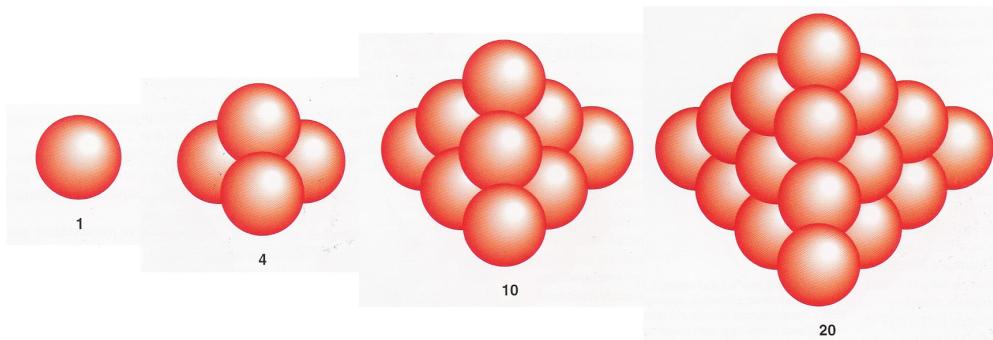
Q3 Redémontrer l'égalité précédente avec une récurrence.

Pour information : il est très facile de déterminer le $n^{ième}$ nombre carré (c'est n^2). Mais on peut essayer d'imaginer des nombres pentagonaux ou autres... Pour ceux qui sont intéressés par le sujet, on peut commencer par la page Wikipedia : https://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_polygonal

□ Exercice H21 (Nombres tétraédriques)

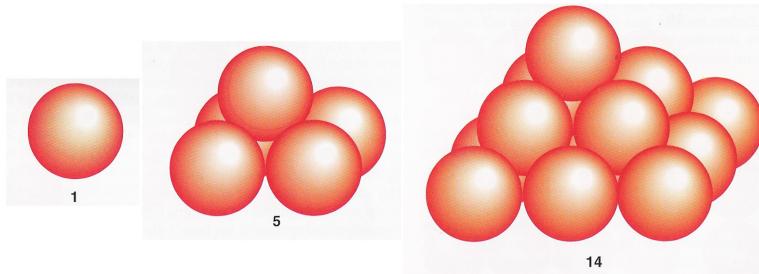
On a vu dans un exercice précédent des nombres triangulaires. Que se passe-t-il si on décide d'empiler ces nombres (voir figure). On obtient des nombres dit tétraédriques. Montrer la formule :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \theta_n = \sum_{k=1}^n T_k = T_1 + T_2 + T_3 + \dots + T_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$



Pour information, cette *curieuse formule* semble se généraliser. Si on somme les nombres tétraédriques, on va tomber sur une formule du type $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{\dots}$.

Exercice H22 (Nombres pyramidaux à base carrée)



Si l'on somme les nombres carrés, on obtient des nombres pyramidaux à base carrée (voir figure). Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \pi_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercice H23

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Exercice H24 (Récurrence forte)

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_0 + u_1 + \dots + u_n \end{cases}$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2^n$.

Exercice H25

On suppose connu le résultat :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad \exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b) \quad \text{et} \quad \exp(0) = 1$$

Montrer par récurrence que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\exp(nx) = \exp(x)^n$$

Exercice H26 (Une récurrence géométrique)

On s'intéresse à la somme des angles d'un polygone convexe (triangle, quadrilatère, pentagone, hexagone, etc.).

On note A_n la somme des angles d'un polygone convexe à n côtés. Montrer (ou expliquer) à l'aide d'un raisonnement par récurrence que pour tout $n \geq 3$ on a $A_n = (n-2) \times 180$.