CHAPITRE

$\mathcal{H}$

TSI$_1$

2025/2026

Raisonnement par récurrence

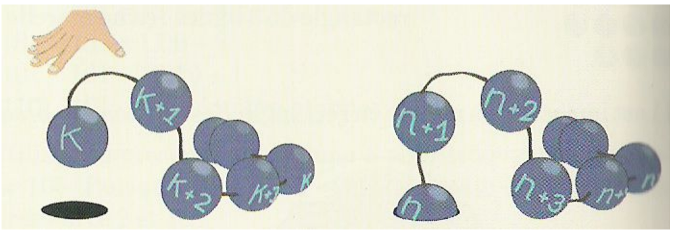

Figure 1: Merveilleux nombres premiers (J.P. Delahaye)

« Si un nombre k tombe dans un trou et si, chaque fois que vous mettez un entier $n \geqslant k$ dans le trou vous êtes obligé de mettre aussi l'entier $n+1$, alors, tous les entiers à partir de k seront dans le trou. »

Sommaire

I Introduction et quelques rappels

I.1 Un mini rappel sur les suites

On aura en fin d'année un chapitre approfondi sur les suites, mais voici un petit rappel qui nous sera utile :

Définition I.1.1

Une **suite** notée (u_n) est une **liste de nombres réels indexée** par les entiers naturels.
À chaque entier n on associe (un et un seul) nombre réel u_n qui est appelé le n^{ieme} terme de la suite.

Une suite peut être définie de plusieurs façons :

- Avec une **formule explicite** : par exemple $u_n = 2n + 3$.
  Pour chaque valeur de n on peut calculer directement la valeur de u_n, par exemple $u_5 = 2\times 5+3 = 13$.
- Avec une **définition par récurrence** : on donne la valeur du premier terme u_0 (ou parfois u_1) et une formule qui permet de calculer un terme à partir du précédent : par exemple $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2$.
  Pour calculer le n^{ieme} terme, il faut donc calculer tous les termes précédents !

Pour voir si l'on a bien compris, on définit deux suites :

$$u_n = 3n - 1 \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} v_{n+1} = 2v_n + n - 1 \\ v_0 = 1 \end{cases}$$

Q 1 Calculer les termes de u_0 à u_4, puis écrire une fonction python de signature `u(n:int)->list` qui renvoie la liste des termes de u_0 à u_n de la suite (u_n).

S1

Q 2 Calculer les termes de v_0 à v_4, puis écrire une fonction python de signature `v(n:int)->list` qui renvoie la liste des termes de v_0 à v_n de la suite (v_n).

S2

☐ ✍ **Exercice H.1**

I.2 Petit rappel de logique

Rappel du premier chapitre :

♪ Définition I.2.1 (proposition)

Une **proposition** (on dit aussi une *assertion*) est une énoncé (mathématique) qui peut prendre deux valeurs : VRAI ou FAUX

Exemple – Voici des propositions :

- ABC est un triangle rectangle en A
- Pour tout n le terme u_n de la suite est négatif.
- ...

Remarques – Dans les cas où la proposition dépend d'un paramètre (comme dans le 2e cas), pour qu'elle soit VRAIE, il faut qu'elle le soit pour **toutes** les valeurs du paramètre.

Attention ! –

- Pour démontrer qu'une proposition est vraie, donner un ou des exemples **ne suffit pas**. Il faut exhiber un raisonnement général utilisant des propositions déjà démontrées...
  (*Voir exemple I.2.3 ci-dessous*)
- En revanche, un **contre-exemple** suffit pour justifier qu'une proposition est fausse.
  (*Voir exemple I.2.2 ci-dessous*)

Exemple (I.2.2)

À propos de la conjecture de Fermat

Parmi les résultats énoncés par Pierre de Fermat (XVIIe siècle), il y a une conjecture qui disait :

« *quel que soit l'entier naturel n, le nombre $F_n = 2^{(2^n)} + 1$ est un nombre premier.* »

Q 1 Tester cette conjecture pour $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$.

Q 2 Écrire une fonction python nommée `fermat(n:int)->int` qui reçoit un entier naturel n et qui renvoie le nombre 0 si le nombre $F_n = 2^{(2^n)} + 1$ est premier et qui renvoie un diviseur de F_n sinon.
Tester alors cette conjecture de Fermat pour $n = 3$, $n = 4$ et $n = 5$.

Q 3 Conclure.

Pour information le mathématicien génial Leohnard Euler (XVIIIe siècle) avait trouvé le **contre-exemple** (sans machine !) :

$$2^{(2^5)} + 1 = 232 + 1 = 4\,294\,967\,297 = 641 \times 6\,700\,417$$

On a même vérifié que pour les valeurs de n comprises entre 5 et 30 elle ne marchait pas !
À l'heure actuelle on ne connait toujours pas de fonction *efficace* permettant de ne générer que des nombres premiers...

Exemple (I.2.3)

À propos de la conjecture de Syracuse... voir aussi cours d'info

On considère la suite (u_n) définie par ainsi :

« *On part d'un entier u_0. Si cet entier est pair on note u_1 la moitié de u_0 et s'il est impair on prend pour u_1 le triple de u_0 auquel on ajoute 1. On recommence alors le procédé avec u_1 pour trouver u_2 et ainsi de suite...* »

Q 1 Calculer les 10 premières valeurs de la suite (u_n) si l'on part de $u_0 = 1$, de $u_0 = 5$ et $u_0 = 13$. Que remarque-t-on ?

Q 2 La conjecture prédit que pour n'importe quelle valeur choisie pour u_0, on finira toujours par tomber à un moment donné sur le nombre 1.
Écrire une petite fonction en Python nommée `duree(n:int)->int` qui reçoit un entier n et qui renvoie le nombre d'étapes nécessaires avant de tomber sur le nombre 1. Ce nombre d'étapes est appelé la *durée du vol.*

Donner alors la durée de vol si le nombre de départ est $u_0 = 27$. ....

Q 3 Écrire un petit script python pour trouver un entier donnant une durée de vol supérieure à celle obtenue avec $u_0 = 27$. ....

Q 4 Modifier votre script python afin qu'il affiche l'entier $u_0 \in [\![1, 1000]\!]$ qui donne la durée de vol maximale ainsi que cette durée ?

Q 5 On peut aussi par exemple s'intéresser à la hauteur du vol, c'est à dire la plus grande valeur atteinte pendant le vol... Pour en savoir plus si vous êtes intéressés pas le sujet on peut consulter la page du site de Gérard Villemin consacrée au sujet : **conjecture de Syracuse**

Pour information, cette conjecture a été testée numériquement avec succès pour des valeurs de u_0 jusqu'à 10^{20} (!!) mais à l'heure actuelle on n'a toujours pas réussi à démontrer qu'elle était vraie *pour tous les entiers.* On ne peut donc toujours pas affirmer que cette proposition est vraie.
Toutefois, depuis 2019, on a réussi à démontrer qu'elle était vraie pour *presque* tous les entiers...

Exemple (I.2.4)

Une petite curiosité !

Considérons pour tout entier n les nombres $A_n = n^{17} + 9$ et $B_n = (n+1)^{17} + 9$. On a pu vérifier que A_n et B_n sont des nombres premiers entre eux (c'est à dire sans diviseurs communs) pour tous $n \leqslant 8 \times 10^{50}$, mais qu'après cela ne marche plus ! *(Voir "merveilleux nombres premiers" de J.P Delahaye, p191)*

II Le principe de récurrence

Pour démontrer une proposition qui dépend d'un paramètre $n \in \mathbb{N}$ le *raisonnement par récurrence* est un bon outil...

Propriété II.0.1

Soit $\mathscr{P}_n$ une proposition dépendant d'un entier naturel n. Si on peut démontrer :

1. que $\mathscr{P}_0$ est vraie; (*Initialisation*)
2. que pour tout entier $n \geqslant 0$, on a l'implication :

   « Si $\mathscr{P}_n$ vraie (**Hypothèse de récurrence**), alors $\mathscr{P}_{n+1}$ vraie » (*Hérédité*)

   Alors on peut conclure que :
3. la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$ (*Conclusion*).

Remarques – L'initialisation ne se fait pas toujours à 0, mais sur n'importe quel entier n_0. La conclusion est alors vraie *à partir* de n_0.

Exemple – On considère la suite (u_n) définie par la relation : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 5} \end{cases}$.

Montrer avec un raisonnement par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant 3$.

S3

III Exercices

III.1 Récurrences avec des égalités

☐ ✍ **Exercice H.2** ☐ ✍ **Exercice H.3** ☐ ✍ **Exercice H.4** ☐ ✍ **Exercice H.5** ☐ ✍ **Exercice H.6**

III.2 Récurrences avec inégalités

☐ ✍ **Exercice H.7** ☐ ✍ **Exercice H.8** ☐ ✍ **Exercice H.9** ☐ ✍ **Exercice H.10**
☐ ✍ **Exercice H.11** ☐ ✍ **Exercice H.12** ☐ ✍ **Exercice H.13** ☐ ✍ **Exercice H.14**
☐ ✍ **Exercice H.15**

III.3 Récurrence avec divisibilité

☐ ✍ **Exercice H.16** ☐ ✍ **Exercice H.17** ☐ ✍ **Exercice H.18**

III.4 Récurrences avec des "..."

Remarques – Le vocabulaire rencontré dans cette section n'est pas à connaitre.

☐ ✍ **Exercice H.19** ☐ ✍ **Exercice H.20** ☐ ✍ **Exercice H.21** ☐ ✍ **Exercice H.22**
☐ ✍ **Exercice H.23**

III.5 Avec récurrence forte

Propriété III.5.1

Soit $\mathscr{P}_n$ une proposition dépendant d'un entier naturel n. Si on peut démontrer :

1. que $\mathscr{P}_0$ est vraie; (*Initialisation*)
2. que pour tout entier $n \geqslant 0$, on a l'implication :

   « Si ($\mathscr{P}_0$ et $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ et ...et $\mathscr{P}_n$) sont vraies (**Hypothèse de récurrence forte**), alors $\mathscr{P}_{n+1}$ vraie » (*Hérédité*)

   Alors on peut conclure que :
3. la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$ (*Conclusion*).

Exemple – Montrer que tout entier $n \geqslant 2$ se décompose en produit de nombres premiers.

S4

☐ ✍ **Exercice H.24**

Voir le TD : une pile de sucres infinie ?