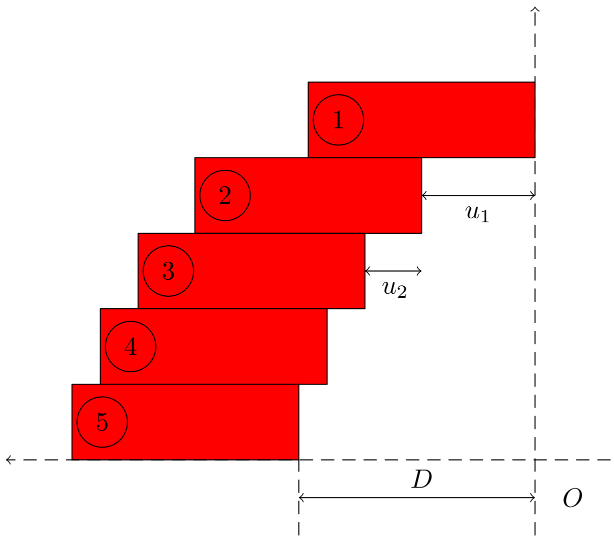
TD : UNE PILE DE SUCRES INFINIE ?



1. Le problème : *si l'on possède suffisamment de briques (ou de cartes), peut-on créer une pile comme ci-dessus avec un débordement D aussi grand que l'on veut ? Si oui, comment les agencer ?*

2. Les notations : les briques sont numérotées de 1 à N.
On considère un repère orienté vers la gauche, dont l'unité est la longueur de la brique (voir figure) et on note :

- u_n le débordement de la brique n par rapport à la brique $n+1$,
- D_N le débordement total maximal obtenu avec N briques. On a ainsi : $\boxed{D_N = \sum_{n=1}^{N-1} u_n}$,
- x_n l'abscisse du centre de gravité de la brique n. On a bien sûr $x_1 = \frac{1}{2}$,
- X_n l'abscisse du centre de gravité de l'ensemble formé par les briques de 1 à n.

3. La modélisation : les lois de la physique nous disent qu'une pile de N briques sera en équilibre si pour tout $n \in [\![1, N-1]\!]$, le centre de gravité de l'ensemble des briques de 1 à n se situe au dessus de la brique $n+1$ (à la limite sur l'extrémité). Avec les notations précédentes cela se traduit par :

$$\boxed{\text{Pile en équilibre} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall n \in [\![1, N-1]\!], X_n \geqslant \sum_{k=1}^{n} u_k}$$

Ainsi, la relation traduisant l'équilibre pour 2 briques donne alors $X_1 \geqslant u_1$. Finalement, si l'on se place à la limite lorsque $X_1 = u_1$, le meilleur débordement que l'on peut obtenir avec deux briques est $D_2 = u_1 = X_1 = x_1$, c'est à dire $\boxed{D_2 = \frac{1}{2}}$.

Q 1 **Centres de gravité :** on rappelle que pour trouver le centre de gravité de plusieurs objets, on fait la moyenne des coordonnées des centres de gravité de chaque objet (voir chapitre sur les barycentres. . .).

a. Exprimer en fonction de u_1, l'abscisse X_2 du centre de gravité de l'ensemble formé par 2 briques.

b. Exprimer en fonction de u_1 et u_2, l'abscisse X_3 du centre de gravité de l'ensemble formé par 3 briques.

c. Montrer que l'abscisse du centre de gravité de l'ensemble formé par les briques de 1 à n est :

$$X_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)u_k = \frac{1}{2} + \frac{(n-1)u_1}{n} + \frac{(n-2)u_2}{n} + \cdots + \frac{u_{n-1}}{n}$$

Q 2 **Équilibre :**

a. Vérifier qu'une pile de 3 briques est en équilibre si $u_2 \leqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{2}u_1$. Combien vaut alors le débord maximal D_3 ?

b. Montrer qu'une pile de N briques est en équilibre lorsque :

$$\forall n \in [\![1, N-1]\!], \quad u_n \leqslant \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{n}u_k$$

Conclusion : si l'on se place à la limite (on remplace toutes les inégalités par des égalités), l'équilibre sera obtenu si et seulement si :

$$\boxed{\forall n \in [\![1, N-1]\!],\ u_n = \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{n}u_k = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\left[u_1 + 2u_2 + \cdots + (n-1)u_{n-1}\right] \text{ et } u_1 = \frac{1}{2}}$$

Q 3 **Formule explicite :** montrer à l'aide d'une récurrence forte que :

$$\boxed{\forall n \in [\![1, N-1]\!], \quad u_n = \frac{1}{2n}}$$

Q 4 **Débord maximal :**

a. En déduire que le débord maximal pour N briques vaut :

$$\boxed{D_N = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k}}$$

b. Peut-on obtenir un débord supérieur à 1 ? Si oui, combien de briques sont nécessaires ?

c. Écrire un petit script en python qui permet de trouver le plus petit entier N tels que $D_N > 5$.

d. Posons $v_n = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$. Justifier que (v_n) est strictement croissante.

e. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_{2n} - v_n \geqslant \frac{1}{2}$ et en déduire que (v_n) tend vers $+\infty$.

Pour information, on verra au second semestre que pour de grandes valeurs de n on a $v_n \sim \ln n$. Ce sujet de « débord maximal » a été fortement étudié, et on est aujourd'hui capable de trouver des empilement bien meilleurs que celui-ci *(Voir l'article sur pour la science de Jean-Paul Delahaye qui sera disponible sur notre site).*