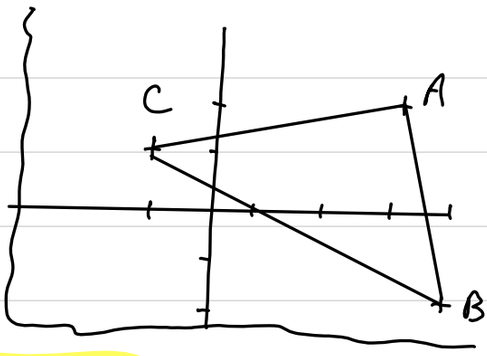
G 16



Q1. Le centre de gravité c'est l'isobarycentre :

$x_G = \frac{3+4+-1}{3} = 2$

$y_G = \frac{2-2+1}{3} = 1/3$

$G\left(2 ; \frac{1}{3}\right)$

Q2. H est l'intersection des hauteurs. Au vu de la figure on peut se demander si le triangle ne serait pas rectangle en A, ce qui réduirait un peu les calculs :

$\vec{AB}\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix}-4\\-1\end{pmatrix}$ $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = -4+4 = 0$

Donc le triangle est rect. en A.

Donc $\underline{A = H}$ intersection des hauteurs $H(3,2)$

Q3. Ω est l'intersection des médiatrices.

- Médiatrice de $[AB]$: * point milieu de $[AB]$ $I_1\begin{pmatrix}3,5\\0\end{pmatrix}$
  * la normale est $\vec{AB}\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$

  → $\text{éq}(\text{méd}_{AB})$: $1(x-3,5) - 4(y-0) = 0$

  $x - 4y - 3,5 = 0$

- Médiatrice $[AC]$: * milieu $[AC]$: $I_2(1 ; 1,5)$
  * normale : $\vec{CA}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$

  → éq (méd_{AC}) : $4(x-1) + 1(y-1,5) = 0$

  $4x + y - 5,5 = 0$

- Intersection des médiatrices :

$$\begin{cases} x - 4y - 3,5 = 0 & L_1 \\ 4x + y - 5,5 = 0 & L_2 \end{cases}$$

Dans L_1 : $x = 4y + 3,5$

Dans L_2 : $4(4y+3,5) + y - 5,5 = 0$

d'où $17y + 8,5 = 0$ $y = \frac{-1}{2}$

Dans L_1 : $x = 2 + 3,5 = 1,5$

$\Omega\left(\frac{3}{2} ; \frac{-1}{2}\right)$

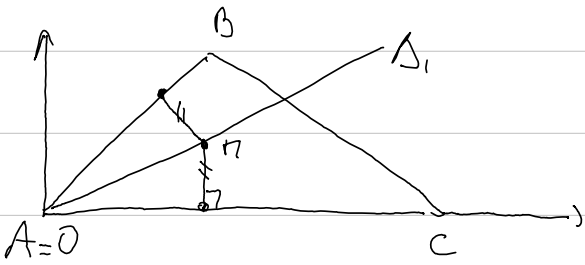
Q4. Alignement :

$\vec{H\Omega}\begin{pmatrix}-3/2\\-5/2\end{pmatrix}$ $\vec{HG}\begin{pmatrix}-1\\-\frac{5}{3}\end{pmatrix}$

$\vec{H\Omega}$ et $\vec{HG}$ sont colinéaires (det = 0)

Donc H, Ω, G sont alignés.

G18 Q1 Notons Δ_1 la bissectrice issue de A dans le triangle ABC. C'est l'ensemble des points situés à égale distance des droites (AB) et (AC) et à "l'intérieur" du triangle.



Cherchons les $\Pi(x,y)$ tels que $d(\Pi,(AB)) = d(\Pi,(AC))$

- La distance de $\Pi(x;y)$ à (Ac) c'est facile, c'est : y.
(car $(AC) \perp (Oy)$)
- Pour la distance de Π à (AB) on commence par chercher une éq. de (AB) : $y = x$ (droite à 45° passant par O)

d'où $d(\Pi,(AB)) = \dfrac{|x-y|}{\sqrt{1+1}} = \dfrac{|x-y|}{\sqrt{2}}$

- On résout ensuite : $\dfrac{|x-y|}{\sqrt{2}} = y$

$\Leftrightarrow \quad x - y = \pm y\sqrt{2}$

soit $x = y(1+\sqrt{2})$ soit $x = y(1-\sqrt{2})$

$y = \dfrac{1}{1+\sqrt{2}}\, x$ $\qquad$ $y = \underbrace{\dfrac{1}{1-\sqrt{2}}}_{<0}\, x$ "cette droite n'est pas dans le triangle".

Conclusion : La bissectrice de (ABC) issue de A a pour équation : $\boxed{y = \dfrac{1}{1+\sqrt{2}}\, x}$

Q2. Des techniques analogues permettent de trouver la biss. issue de C : $\boxed{3x + (5+\sqrt{34})y - 24 = 0}$

Q3. Le centre du cercle inscrit est l'intersection des deux bissectrices précédentes.

$$\begin{cases} x = (1+\sqrt{2})y \\ 3x + (5+\sqrt{34})y - 24 = 0 \end{cases}$$

Par substitution on trouve :

$$y = \frac{24}{8+3\sqrt{2}+\sqrt{34}} \approx 1,3$$

et $x = \dfrac{24(1+\sqrt{2})}{8+3\sqrt{2}+\sqrt{34}} \approx 3,2$

centre du cercle inscrit.