Planche G
Équations de droites/cercles

□ Exercice G1 (éléments caractéristiques de droites paramétriques)

Q 1 Déterminer des éléments caractéristiques des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ puis donner leur position relative (sécantes/parallèles/confondues) :

$$\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 2t - 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_2 : \begin{cases} x = 3 + 6t \\ y = 1 - 3t \end{cases}$$

Q 2 Les droites $\mathcal{D}_3$ et $\mathcal{D}_4$ sont elles perpendiculaires ?

$$\mathcal{D}_3 : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_4 : \begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$$

□ Exercice G2 (intersection de droites paramétriques)

On considère les droites d_1 et d_2 d'équations paramétriques :

$$d_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + t \end{cases} \quad \text{et} \quad d_2 : \begin{cases} x = -4 + t \\ y = -1 - 3t \end{cases}$$

Déterminer les coordonnées du point d'intersection éventuel.

□ Exercice G3 (équation cartésienne)

Q 1 Déterminer de deux façons différentes une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}_1$ passant par le point $A(2, -1)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Q 2 Déterminer de deux façons différentes une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}_2$ passant par le point $A(2, -1)$ et normale au vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Q 3 Donner l'équation cartésienne de la droite (AB) avec $A(1, -2)$ et $B(-3, 5)$.

□ Exercice G4 (équations paramétriques ↔ équations cartésiennes)

Q 1 Soit $\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 - 5t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$. Donner une équation cartésienne de $\mathcal{D}_1$ (2 méthodes).

Q 2 Soit $\mathcal{D}_2 : 3x + 2y - 5 = 0$. Donner une équation paramétrique de $\mathcal{D}_2$ (2 méthodes).

□ Exercice G5 (équations de droites)

Soit ABC un triangle. On considère les deux points E et E' sur $[AB]$ tels que $AE = \frac{1}{3}AB$ et $AE' = \frac{2}{3}AB$. Les deux droites Δ et Δ' sont parallèles à (BC), passent respectivement par E et E' et coupent (AC) en D et D'. Les droites (BD) et (CE) se coupent en un point M. Les droites (BD') et (CE') se coupent en M'. Montrer que les trois points A, M et M' sont alignés.
(On pourra introduire le repère $(A, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD})$ et chercher des équations de droites...)

□ Exercice G6 (projeté orthogonal)

On considère un point $A(1,5)$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}$.

Q 1 Dessiner cette droite dans un repère orthonormé.

Q 2 Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de A sur $\mathcal{D}$.

□ Exercice G7 (projeté orthogonal)

Soit $M_0(1,-2)$ et D la droite d'équation $x + 2y - 3 = 0$.
Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de M_0 sur D.

□ Exercice G8 (distance point/droite)

On considère le triangle ABC dont les sommets ont pour coordonnées $A(1,0)$, $B(3,-1)$ et $C(1,5)$.

Q 1 Déterminer la longueur de la hauteur issue de C du triangle ABC.

Q 2 Calculer l'aire du triangle ABC.

□ Exercice G9 (distance point/droite – bissectrices)

Former les équations cartésiennes des bissectrices des deux droites :

$$D_1 : 3x + 4y + 3 = 0 \qquad D_2 : 12x - 5y + 4 = 0$$

□ Exercice G10 (équation de cercle)

Déterminer par deux méthodes différentes l'équation cartésienne du cercle circonscrit au triangle ABC avec $A(1,2)$, $B(4,3)$ et $C(-6,8)$ *(Préciser également son centre et son rayon.)*

□ Exercice G11 (équation de cercle)

Déterminer les éléments caractéristiques de l'ensemble $\mathcal{E}$ d'équation cartésienne :

$$2x^2 + 2y^2 - 8x + 4y - 15 = 0$$

□ Exercice G12 (tangentes)

Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $\Omega = (a,b)$ et de rayon R. Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en un point $M_0(x_0, y_0)$ de $\mathcal{C}$.

□ Exercice G13 (tangentes)

Soit $A(2;5)$ un point. On considère le cercle $\mathcal{C}$ d'équation cartésienne : $(x-1)^2 + y^2 = 13$.
Déterminer une équation des tangentes à $\mathcal{C}$ passant par A.

□ Exercice G14 (positions relatives)

On considère les deux ensembles $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ d'équations cartésiennes respectives :

$$\mathcal{E}_1 : \ x^2 - 2x + y^2 - 4x - 4 = 0 \qquad \mathcal{E}_2 : \ x + y - 2 = 0$$

Déterminer les natures de ces ensembles ainsi que leurs positions relatives.

□ Exercice G15 (positions relatives)

On considère les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ d'équations cartésiennes respectives $2y + x - 1 = 0$ et $x = 1$.

Q 1 Vérifier que le point $A(-1, 1) \in \mathcal{D}_1$.

Q 2 Déterminer l'équation cartésienne du (des ?) cercle $\mathcal{C}$ centré sur $\mathcal{D}_2$ et tangent à $\mathcal{D}_1$ en A.

□ Exercice G16

Dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ on se donne trois points $A(3, 2)$, $B(4, -2)$ et $C(-1, 1)$.

Q 1 Déterminer les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC.

Q 2 Déterminer les coordonnées de l'orthocentre H du triangle ABC. Que déduire sur le triangle ABC ?

Q 3 Déterminer les coordonnées du centre Ω du cercle circonscrit au triangle ABC. En déduire le rayon et une équation de ce cercle.

Q 4 Vérifier que les points G, H et Ω sont alignés.

□ Exercice G17

On considère trois droites :

$$D_1 : y = 1 - x \quad D_2 : y = 2x + 2 \quad D_3 : y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

Q 1 Calculer les coordonnées des points d'intersection $A = D_1 \cap D_3$, $B = D_1 \cap D_2$, et $C = D_2 \cap D_3$.

Q 2 Calculer BC.

Q 3 Calculer l'angle $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)$.

Q 4 **a.** Donner une équation cartésienne de la droite Δ passant par C et orthogonale à D_1.

b. Calculer les coordonnées du point d'intersection E de Δ et de l'axe des abscisses.

c. Calculer les coordonnées du **projeté orthogonal** F de E sur D_2.

Q 5 Calculer la distance de F à D_1.

□ Exercice G18

Dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ on se donne trois points $A(0, 0)$, $B(3, 3)$ et $C(8, 0)$.

Q 1 Déterminer une équation de la bissectrice du triangle ABC passant par A.

Q 2 Déterminer une équation des deux autres bissectrices.

Q 3 Déterminer les coordonnées du centre du cercle inscrit dans ABC, ainsi que son rayon.

Pour aller un peu plus loin si on gère les nombres complexes...

□ Exercice G19 (tangentes et nombres complexes)

Soit $C_1(\Omega_1, R_1)$ et $C_2(\Omega_2, R_2)$ deux cercles. On considère l'ensemble des couples de points (M_1, M_2) tels que M_1 et M_2 appartiennent respectivement à C_1 et C_2 et tels que la tangente à C_1 en M_1 et la tangente à C_2en M_2 sont orthogonales.
Déterminer l'ensemble des milieux des segments $[M_1M_2]$.
Indic : introduire un repère centre Ω_1 tel que l'affixe de Ω_2 soit réelle et utiliser le repérage avec des complexes...

□ Exercice G20 (utilisation des nombres complexes...)

Soit ABC un triangle. On construit le carré indirect $ABDE$ et le carré direct $ACFG$. On note M le milieu de $[BC]$. Montrer que (AM) et (EG) sont orthogonale.

□ Exercice G21 (utilisation des nombres complexes...)

Soit A, B et C trois points non alignés et O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. On note a, b et c les affixes des points A, B et C dans un repère orthonormal centré sur O.

Q 1 Montrer que l'affixe de l'orthocentre H de ABC est $a + b + c$.

Q 2 Prouver que l'orthocentre H, le centre du cercle circonscrit O et le centre de gravité G sont alignés (on rappelle que G a pour affixe $\frac{a+b+c}{3}$).