CHAPITRE

$\mathscr{G}$

TSI$_1$

2025/2026

Droites et cercles dans le plan

L'objectif de ce chapitre est de faire en sorte qu'un objet aussi élémentaire qu'une droite n'ait plus aucun secret pour nous...
On verra la notion d'équation pour caractériser un objet géométrique et on distinguera les équations cartésiennes et les équation paramétriques.

Sommaire

I Équations de droites

I.1 Équations paramétriques

Propriété I.1.1

La droite $\mathscr{D}$ passant par le point $M_0(x_0, y_0)$ et dirigée par le vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ a pour équation paramétrique :

$$\begin{cases} x = x_0 + t \times a \\ y = y_0 + t \times b \end{cases} \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

Preuve

$M \in \mathscr{D} \iff \exists t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{M_0M} = t\vec{u} \iff \dots$

S1

□

Exemple – Déterminer l'équation paramétrique de la droite (AB) avec $A(1, 2)$ et $B(2, -5)$.

S2

Remarques – Si $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est directeur pour $\mathscr{D}$ alors $\vec{n}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est normal (c'est à dire orthogonal) à $\mathscr{D}$. En effet, $\vec{u} \cdot \vec{n} = -ab + ba = 0$.

□ ✍ **Exercice G.1** □ ✍ **Exercice G.2**

I.2 Équations cartésiennes

Propriété I.2.1

Un ensemble $\mathscr{D}$ de points est une droite si et seulement si son équation cartésienne est de la forme

$$ax + by + c = 0 \qquad \text{avec } (a, b) \neq (0, 0)$$

Dans ce cas le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathscr{D}$, et $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est directeur de $\mathscr{D}$.

Prouvons ce résultat en séparant les deux implications :

Preuve

S3

☐

On utilisera souvent le raccourci donné par la propriété suivante :

Propriété I.2.2

La droite passant par $A(x_A, y_A)$ de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ a pour équation cartésienne :

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$$

Il faut évidemment savoir passer d'une équation paramétrique à cartésienne et réciproquement.

☐ ✍ **Exercice G.3** ☐ ✍ **Exercice G.4** ☐ ✍ **Exercice G.5**

I.3 Distance d'un point à une droite

♪ Définition I.3.1 (Distance)

La distance d'un point M à une droite $\mathscr{D}$ est notée $d(M, \mathscr{D})$ est vaut par définition :

$$d(M, \mathscr{D}) = \inf\{MA,\ A \in \mathscr{D}\}$$

Remarques – C'est la longueur du plus court chemin reliant M à $\mathscr{D}$.

Afin de déterminer cette distance on va utiliser la notion de projection orthogonale d'un point sur une droite (on a déjà vu dans le chapitre sur le produit scalaire, la projection orthogonale d'un vecteur sur un autre).

Propriété I.3.2 (projection orthogonale d'un point sur une droite)

Soit M un point et $\mathscr{D}$ une droite dirigée par un vecteur $\vec{u}$. Le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{D}$ est l'unique point H de $\mathscr{D}$ tel que $\overrightarrow{MH} \cdot \vec{u} = 0$.

Preuve

S4

☐

☐ ✍ **Exercice G.6** ☐ ✍ **Exercice G.7**

Propriété I.3.3 (Distance)

On a :

$$\boxed{d(M, \mathscr{D}) = MH \text{ avec } H \text{ projeté orthogonal de } M \text{ sur } \mathscr{D}.}$$

On peut alors déduire les formules suivantes (qui ne sont pas à connaître par cœur), mais il faut savoir calculer la distance d'un point à une droite :

Propriété I.3.4

Si $M(x_M, y_M)$, et $\mathscr{D}$ est la droite passant par A, dirigée par $\vec{u}$, de vecteur normal $\vec{n}$ et d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$, on a alors les expressions suivantes :

a. $d(M, \mathscr{D}) = \dfrac{|[\overrightarrow{AM}, \vec{u}]|}{||\vec{u}||}$ **b.** $d(M, \mathscr{D}) = \dfrac{|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}|}{||\vec{n}||}$ **c.** $d(M, \mathscr{D}) = \dfrac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Preuve

[formule **a.**] Introduire le point H et calculer $\left[\overrightarrow{AM}, \vec{u}\right]$

S5

Remarque : on peut faire le rapprochement avec l'aire du parallélogramme... □

Preuve

[formule **b.**] Introduire le point H et calculer $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}$

S6

□

Preuve

[formule **c.**] Partir de la formule b. par exemple

S7

□

□ ✍ **Exercice G.8** □ ✍ **Exercice G.9**

II Équations de cercles

II.1 Équation cartésienne d'un cercle

♪ Définition II.1.1

Le cercle de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon R est l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $||\overrightarrow{\Omega M}|| = R$.

Propriété II.1.2

Le cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon R a pour équation cartésienne :

$$\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2}$$

Preuve

S8

☐

Exemple – Retrouver l'ensemble d'équation : $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 4$

S9

☐ ✍ **Exercice G.10** ☐ ✍ **Exercice G.11** ☐ ✍ **Exercice G.12** ☐ ✍ **Exercice G.13**

II.2 Équation paramétrique d'un cercle

Propriété II.2.1

Le cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega(a,b)$ et de rayon R a pour équation paramétrique :

$$\begin{cases} x = a + R\cos\theta \\ y = b + R\sin\theta \end{cases} \qquad \text{avec } \theta \in]-\pi, \pi]$$

Remarques – En version complexe cela donne : $M(z) \in \mathscr{C} \iff \exists \theta \in \mathbb{R},\ z = (a+ib) + Re^{i\theta}$

II.3 Droites et cercles

Propriété II.3.1 (Position relative d'une droite et d'un cercle)

Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre Ω, de rayon R et $\mathscr{D}$ une droite :

1. Si $d(\Omega, \mathscr{D}) > R$ alors $\mathscr{D} \cap \mathscr{C} = \emptyset$,
2. Si $d(\Omega, \mathscr{D}) < R$ alors $\mathscr{D} \cap \mathscr{C} = \{A, B\}$, deux points distincts,
3. Si $d(\Omega, \mathscr{D}) = R$ alors $\mathscr{D} \cap \mathscr{C} = \{H\}$. Dans ce cas, la droite $\mathscr{D}$ est *tangente* au cercle en H. De plus la droite $\mathscr{D}$ est alors orthogonale à (ΩH).

Preuve

S10

☐

☐ ✍ **Exercice G.14** ☐ ✍ **Exercice G.15**

III Exos en vrac

☐ ✍ **Exercice G.16** ☐ ✍ **Exercice G.17** ☐ ✍ **Exercice G.18** ☐ ✍ **Exercice G.19**

☐ ✍ **Exercice G.20** ☐ ✍ **Exercice G.21**