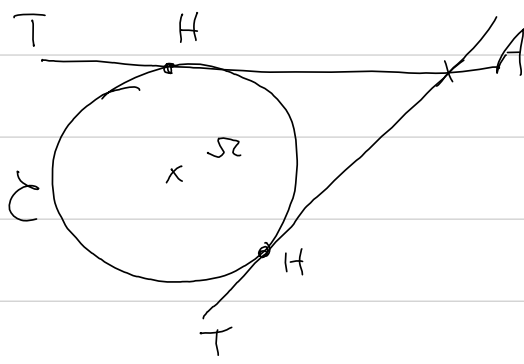


G13



Idee 1 : on cherche H point de contact entre T et C.

$H(x_H, y_H)$ vérifie :

$$* H \in C : (x_H - 2)^2 + (y_H - 5)^2 = 13$$

$$* \vec{AH} \cdot \vec{SH} = 0 : (x_H - 1)(x_H - 2) + y_H(y_H - 5) = 0$$

Cela donne :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 12 & L_1 \\ x^2 + y^2 - 3x - 5y = -2 & L_2 \end{cases}$$

$$L_1 : x^2 + y^2 - 2x = 12$$

$$L_1 - L_2 : x + 5y = 14 \quad \text{d'où } x = 14 - 5y$$

$$\text{On reporte ds } L_1 : (14 - 5y)^2 + y^2 - 2(14 - 5y) = 12$$

$$26y^2 - 130y = -156$$

$$13y^2 - 65y + 78 = 0$$

$$\text{On trouve } y = 2 \text{ ou } y = 3$$

$$\text{On reporte } x = 14 - 5 \times 2 = 4 \text{ ou } x = 14 - 5 \times 3 = -1$$

$$\text{Ainsi on a } H_1(4, 2) \text{ ou } H_2(-1, 3)$$

On trouve donc 2 tangentes :

$$T_1 = (AH_1) \quad \text{et} \quad T_2 = (AH_2)$$

$$* \vec{AH}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ donc un vecteur normal à } T_1 \text{ est } \vec{n}_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{D'où } T_1 : 3(x - 2) + 2(y - 5) = 0$$

$$* \vec{AH}_2 \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \text{ d'où } \vec{n}_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{D'où } T_2 : 2(x - 2) - 3(y - 5) = 0$$

Idee 2 : T est une droite passant par A et dont la distance à S vaut le rayon du cercle $\sqrt{13}$.

T : $ax + by + c = 0$ On peut voir que T n'est pas horizontale, donc $a \neq 0$. On le divise par "a" on peut choisir $a = 1$. Donc :

$$T : x + by + c = 0$$

$$\rightarrow A \in T \Leftrightarrow 2 + 5b + c = 0 \quad (L_1)$$

$$\rightarrow d(S, T) = \sqrt{13} \Leftrightarrow \frac{|1 + b \times 0 + c|}{\sqrt{1^2 + b^2}} = \sqrt{13}$$

$$\Leftrightarrow |1 + c|^2 = 13 \times (1 + b^2)$$

$$\Leftrightarrow 1 + c^2 + 2c = 13 + 13b^2$$

$$\Leftrightarrow 12 + 13b^2 - c^2 - 2c = 0 \quad (L_2)$$

Dans L_1 on obtient : $c = -2 - 5b$

$$\text{Dans } L_2 : 12 + 13b^2 - (-2 - 5b)^2 + 2(-2 - 5b) = 0$$

$$12 + 13b^2 - 4 - 25b^2 - 20b + 4 + 10b = 0$$

$$-12b^2 - 10b + 12 = 0$$

$$6b^2 + 5b - 6 = 0$$

$$\Delta = 25 + 4 \times 36 = 169 = 13^2$$

$$b = \frac{-5 \pm 13}{12} = \begin{cases} -3/2 \\ 2/3 \end{cases}$$

$$\text{D'où } c = -2 + 5 \times \frac{3}{2} = \frac{11}{2} \quad \text{ou} \quad c = -2 - 5 \times \frac{2}{3} = -\frac{16}{3}$$

$$\text{D'où } T_1 : x - \frac{3}{2}y + \frac{11}{2} = 0 \quad (\text{i.e.}) \quad 2x - 3y + 11 = 0$$

$$T_2 : x + \frac{2}{3}y - \frac{16}{3} = 0 \quad (\text{i.e.}) \quad 3x + 2y - 16 = 0$$

Idee 3 : T coupe le cercle en 1 et 1 seul point :

$$\begin{cases} y = mx + p \\ 5 = 2m + p \end{cases} \rightarrow y = mx + 5 - 2m$$

$$(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 13 \rightarrow (x - 2)^2 + (mx + 5 - 2m)^2 = 13$$

$$x^2 - 2x + 1 + m^2x^2 + 2m(5 - 2m)x + (5 - 2m)^2 - 13 = 0$$

$$(1 + m^2)x^2 + (10m - 4m^2 - 2)x + 1 + (5 - 2m)^2 - 13 = 0$$

$$\Delta = (10m - 4m^2 - 2)^2 - 4(1 + m^2)(-12 + 25 - 20m + 4m^2)$$

$$= 100m^2 + 16m^4 + 4 - 80m^3 - 40m + 16m^2(4 + 4m^2)(4m^2 - 20m + 13)$$

$$= \dots - (16m^2 - 80m + 52 + 16m^4 - 80m^3 + 52m^2)$$

$$= 48m^2 + 40m - 48 = 8(6m^2 + 5m - 6)$$

$$\Delta = 0 : \Delta' = 25 + 36 \times 4 = 169 = 13^2$$

$$m = \frac{-5 \pm 13}{12} = \begin{cases} -3/2 \\ 2/3 \end{cases}$$

$$y = -\frac{3}{2}x + p \quad \text{ou} \quad y = \frac{2}{3}x + p$$

$$y = -\frac{3}{2}x + 8$$

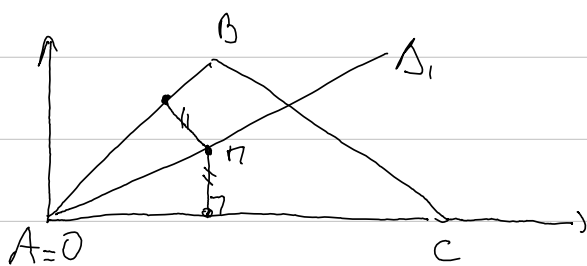
$$y = \frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$$

$$(p = 5 - 2m)$$

$$2y + 3x - 16 = 0$$

$$3y - 2x - 11 = 0$$

G18 Q1 Notons Δ_1 la bissectrice issue de A dans le triangle ABC. C'est l'ensemble des points situés à égale distance des droites (AB) et (AC) et à l'intérieur du triangle.



Cherchons les $P(x,y)$ tels que $d(P, (AB)) = d(P, (AC))$

• La distance de $P(x,y)$ à (AC) c'est facile, c'est: y .
(car $(AC) \perp (Oy)$)

• Pour la distance de P à (AB) on commence par chercher une eq. de (AB) : $y=x$ (droite à 45° passant par 0)

où $d(P, (AB)) = \frac{|x-y|}{\sqrt{1+1}} = \frac{|x-y|}{\sqrt{2}}$

• On résout ensuite: $\frac{|x-y|}{\sqrt{2}} = y$
($\Rightarrow x-y = \pm y\sqrt{2}$)

soit $x = y(1+\sqrt{2})$ soit $x = y(1-\sqrt{2})$

$y = \frac{1}{1+\sqrt{2}} x$

$y = \frac{1}{1-\sqrt{2}} x$
" cette droite n'est pas dans le triangle "

Conclusion: La bissectrice de (ABC) issue de A a

pour équation: $y = \frac{1}{1+\sqrt{2}} x$

Q2. Des techniques analogues permettent de trouver la bissectrice issue de C:

$3x + (5+\sqrt{34})y - 24 = 0$

Q3. Le centre du cercle inscrit est l'intersection des deux bissectrices précédentes.

$$\begin{cases} x = (1+\sqrt{2})y \\ 3x + (5+\sqrt{34})y - 24 = 0 \end{cases}$$

Par substitution on trouve:

$y = \frac{24}{8+3\sqrt{2}+\sqrt{34}} \approx 1,3$

et $x = \frac{24(1+\sqrt{2})}{8+3\sqrt{2}+\sqrt{34}} \approx 3,2$

centre
du cercle
inscrit.