CHAPITRE

$\mathscr{F}$

TSI$_1$

2025/2026

Produit scalaire et déterminant

Sommaire

I Produit scalaire **2**
- I.1 Définitions 2
- I.2 Bilinéarité 3
- I.3 Orthogonalité 4

II Déterminant **6**
- II.1 Définition 6
- II.2 Expression du déterminant dans une base 6

I Produit scalaire

Rappelons que si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs du plan, on dira qu'ils sont orthogonaux si les droites $\mathscr{D}_u$ et $\mathscr{D}_v$ passant par un point A et dirigées respectivement par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont perpendiculaires.

Dans cette section, le plan vectoriel est muni d'une base **orthonormée** $\mathscr{B}(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (c'est à dire que les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont orthogonaux et de même norme (supposée égale à 1).

I.1 Définitions

♪ Définition I.1.1 (géométrique)

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls, on appelle **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ **le nombre réel**, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ou encore $(\vec{u}|\vec{v})$ défini par :

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})}$$

- Si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul, le produit scalaire est nul aussi.

Remarques – On a en particulier : $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$. En effet :

. . . .

Il découle immédiatement de cette définition la propriété importante suivante :

Propriété I.1.2 (Cauchy-Schwarz)

- $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leqslant \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$ avec égalité si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} \leqslant \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$ avec égalité si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens.

Preuve

Justifions par exemple le premier point :

S1

□

Remarques – Cette inégalité qui semble évidente pour les vecteurs du plans, se généralise pour des vecteurs dans un espace vectoriel de n'importe quelle dimension...

Il est fondamental de connaître l'expression analytique d'un produit scalaire :

Propriété I.1.3 (Expression en base orthonormée)

Dans un base orthonormée on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Alors on a :

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'}$$

Preuve

- Si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul, le résultat est clair.
- Sinon, en utilisant le repérage polaire, il existe deux réels θ et θ' tels que : $\vec{u} =|| \vec{u} || \vec{u}_\theta$ et $\vec{v} =|| \vec{v} || \vec{v}_{\theta'}$.
  On a donc $(\vec{u}, \vec{v}) = \theta' - \theta$ et cela donne : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos(\theta' - \theta)$.

  D'où en appliquant les formules d'addition du cosinus : ....

  ....

  ....

□

Remarques – Avec la notation complexe cela donne :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = Re(z\overline{z'}) = Re(\overline{z}z')$$

I.2 Bilinéarité

Propriété I.2.1 (Bilinéarité)

Le produit scalaire est une **application bilinéaire symétrique**. Plus précisément cela signifie que :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (symétrie)
- $\vec{u} \cdot (\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) + \mu(\vec{u} \cdot \vec{w})$ (linéarité à droite)

Preuve

- Le premier point est trivial en utilisant la définition, puisque le cosinus est une fonction paire.
- Pour le deuxième, il suffit d'utiliser l'expression analytique du produit scalaire (propriété I.1.3). Écrire les calculs pour $\lambda = \mu = 1$:

  S2

□

Remarques –

- On peut donc sans ambiguïté écrire $\lambda\vec{u} \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\lambda\vec{u}) \cdot \vec{v}$
- La symétrie et la linéarité à droite impliquent la bilinéarité.

Exemple – Compléter les égalités suivantes :

- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 =$ ....
- $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 =$ ....
- $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) =$ ....
- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 =$ ....

- $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2+\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

REMARQUES –

- On peut interpréter la dernière égalité à l'aide d'un parallélogramme :

S3

- On peut utiliser les expressions précédentes pour donner une expression du produit scalaire qui ne fait intervenir que des normes de vecteurs :

S4

EXEMPLE – Un utilisation classique : déterminer $|\widehat{(\vec{u},\vec{v})}|$ lorsque $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

S5

I.3 Orthogonalité

Propriété I.3.1

- Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si et seulement si $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=0}$.
- *Théorème de Pythagore :* les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}+\vec{v}\|^2$

Propriété I.3.2 (projeté orthogonal)

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs avec $\vec{u} \neq \vec{0}$. Alors il existe un unique vecteur $\vec{w}$ colinéaire à $\vec{u}$ tel que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$.
Ce vecteur $\vec{w}$, qui vaut $\vec{w} = \dfrac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{||\vec{u}||^2}\vec{u}$, vérifie l'égalité : $(\vec{v} - \vec{w}) \cdot \vec{u} = 0$.
On l'appelle donc le **projeté orthogonal** de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$.

Preuve

Procédons par *analyse/synthèse* :

S6

□

On déduit la propriété fondamentale suivante :

Propriété I.3.3 (à maîtriser parfaitement)

On ne change pas le produit scalaire de deux vecteurs en remplaçant l'un par son projeté orthogonal sur l'autre.

S7

Un cas particulier important est celui de la décomposition d'un vecteur suivant une base orthonormée. Soit $\mathscr{B}(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est une base orthonormée. Compléter :

$$\boxed{\vec{u} = \ldots\ldots\ldots\ldots\vec{\imath} + \ldots\ldots\ldots\ldots\vec{\jmath}}$$

On peut démontrer cette égalité avec la propriété I.3.2 ou avec les coordonnées :

Preuve

S8

□

II Déterminant

Dans cette section, le plan vectoriel est muni d'une base **orthonormée directe** $\mathscr{B}(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

II.1 Définition

Définition II.1.1

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls, on appelle **déterminant** (on trouve aussi la dénomination *produit mixte*) de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le nombre réel, noté $[\vec{u}, \vec{v}]$ ou encore $\det(\vec{u}, \vec{v})$, défini par :

$$\boxed{\det(\vec{u}, \vec{v}) = [\vec{u}, \vec{v}] = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})}$$

- Si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul, le déterminant est nul aussi.

Remarques – **Interprétation géométrique :**
Soit ABC un triangle, trouver une relation entre le determinant des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et l'aire du triangle.

S9

II.2 Expression du déterminant dans une base

Propriété II.2.1 (Expression en base orthonormée directe)

Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors $[\vec{u}, \vec{v}] = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$

Preuve

La méthode est la même que celle utilisée avec le produit scalire.Posons $\vec{u} = ||\vec{u}||\overrightarrow{u_\theta}$, $\vec{v} = ||\vec{v}||\overrightarrow{u_{\theta}}$ et utilisons les formules d'addition du sinus :

S10

☐

Propriété II.2.2 (Bilinéarité)

Le déterminant est une **application bilinéaire antisymétrique**. Plus précisément cela signifie que :

- $[\vec{u}, \vec{v}] = -[\vec{v}, \vec{u}]$ (antisymétrie)
- $[\vec{u}, \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}] = \lambda[\vec{u}, \vec{v}] + \mu[\vec{u}, \vec{w}]$.

Propriété II.2.3 (Colinéarité)

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement si $\boxed{\det(u, v) = 0}$.
*(On dit que la famille $(\vec{u}, \vec{v})$ est **liée**)*