

PLANCHE F

PRODUIT SCALAIRE / DÉTERMINANT

□ Exercice F1

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs du plan avec $(\vec{u}; \vec{v}) = \alpha$ et $\alpha \in [0; \pi]$. Calculer α ou $\|\vec{v}\|$ selon les cas :

Q1 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2$, $\|\vec{u}\| = 1$ et $\alpha = \frac{-\pi}{4}$.

Q2 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 8\sqrt{2}$, $\|\vec{u}\| = 2$ et $\|\vec{v}\| = 8$

Q3 $\vec{u} \cdot \vec{v} = -18$, $\|\vec{u}\| = 2\sqrt{3}$ et $\|\vec{v}\| = 6$

□ Exercice F2

On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ainsi que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \|\vec{u} + t\vec{v}\|^2$.

Q1 Rappeler la formule de Cauchy-Schwarz.

La suite démontre cette formule sans utiliser la définition géométrique du produit scalaire.

Q2 Montrer que la forme développée de f est un trinôme du second degré en t .

Q3 Justifier que le discriminant de ce trinôme est négatif ou nul.

Q4 En déduire une démonstration de la formule de Cauchy-Schwarz.

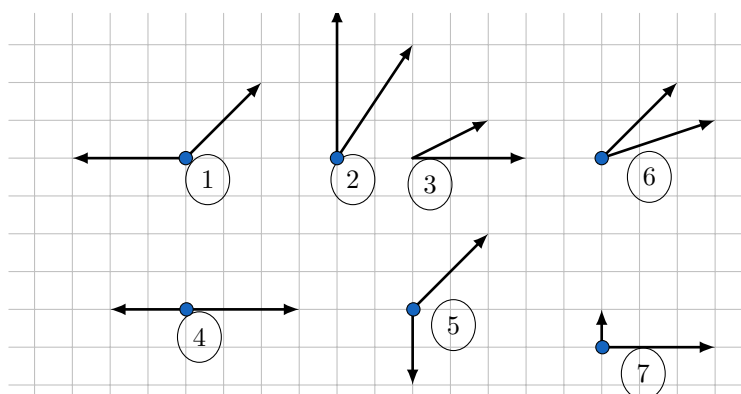
□ Exercice F3 (Bilinéarité)

Soit A et B deux points distincts du plan, I le milieu de $[AB]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Déterminer l'ensemble E_λ des points M tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = \lambda$.

□ Exercice F4

On considère que le carreau est l'unité. Déterminer dans chaque cas le produit scalaire (envisager plusieurs méthodes) :



□ Exercice F5

En utilisant la relation de Chasles et la distributivité du produit scalaire, démontrer que dans un parallélogramme, « si les 4 côtés sont égaux alors les diagonales sont perpendiculaires ».

□ Exercice F6

Soit $ABCD$ un carré. On note I le milieu de $[AD]$ et J celui de $[AB]$. Démontrer par la méthode de votre choix que les droites (CJ) et (BI) sont orthogonales.

□ Exercice F7

Dans chaque cas déterminer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ dans le triangle ABC :

Q1 $AB = 5$, $AC = 4\sqrt{2}$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}$

Q2 $AB = 5$ et $AH = 4$ où H est le pied de la hauteur issue de C , avec $H \in [AB)$.

Q3 $A(-1; -1)$, $B(4; -1)$ et $C(3; 3)$ dans un repère orthonormé.

□ Exercice F8

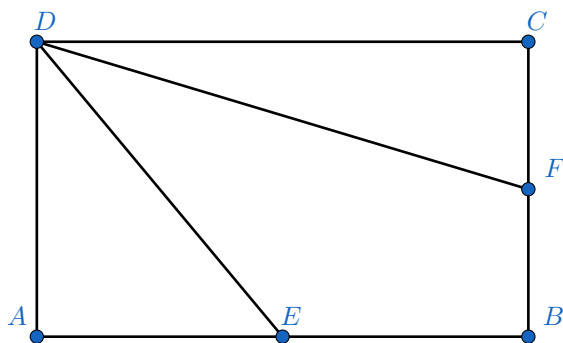
Soit A un point du plan, $\vec{n}$ un vecteur de norme 1.

Q1 Déterminer un point M_0 sur la demi-droite $[A\vec{n})$ tel que $\overrightarrow{AM_0} \cdot \vec{n} = 2$.

Q2 Déterminer tous les points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 2$

□ Exercice F9

On considère le rectangle $ABCD$ de longueur 10 et de largeur 6. E est le milieu de $[AB]$ et F est le milieu de $[BC]$.



Déterminer les valeurs exactes des produits scalaires suivants :

$$\begin{array}{ccc} \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} & \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DF} \\ \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} & \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF} & \overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{DB} \end{array}$$

□ Exercice F10 (Orthogonalité)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points $A(-4; 1)$, $B(-1; 2)$ et $C(1; -4)$.

Q1 Montrer de deux manières différentes que le triangle ABC est rectangle.

Q2 Déterminer les coordonnées du point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un rectangle.

Q3 Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$.

□ Exercice F11 (Orthogonalité)

Le plan est rapporté à un repère $\mathcal{R}(O; \vec{i}, \vec{j})$ de vecteurs du plan dont on note $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ la base orthonormée de vecteurs associée.

Déterminer les valeurs de x pour lesquelles les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x-2 \\ 2x-1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x+4 \\ x-2 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux.

□ Exercice F12 (Théorème de la médiane et relation d'Al-Kashi)

(On rappelle que $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$). On considère un triangle ABM .

Q1 On note I le milieu de $[AB]$.

En introduisant judicieusement le point I , montrer la relation de la médiane :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$$

Q2 On note $\widehat{M} = (\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}})$. Montrer la relation d'Al-Kashi :

$$AB^2 = MA^2 + MB^2 - 2MA \times MB \times \cos(\widehat{M})$$

□ Exercice F13 (Hauteurs concourantes)

L'objectif est de montrer que les hauteurs d'un triangle sont concourantes.

Considérons un triangle ABC dont les pieds des hauteurs sont A' , B' et C' . On note H le point d'intersection des droites (AA') et (BB') .

Q1 Justifier les égalités : $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ et $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$.

Q2 Utiliser la relation de Chasles pour introduire le point C dans les égalités précédentes et déduire :

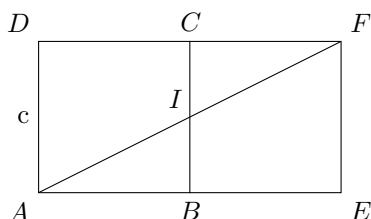
$$\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$$

Q3 Conclure.

□ Exercice F14 (3 expressions du produit scalaire)

Dans la figure $ABCD$ et $BEFC$ sont deux carrés de côté $c \neq 0$.

Le point I est défini par $I = (AF) \cap (DE)$.



Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AI}$ par trois méthodes différentes.

□ Exercice F15 (Colinéarité)

Le plan est rapporté à un repère $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$ de vecteurs du plan dont on note $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ la base orthonormée de vecteurs associée.

Déterminer les valeurs de x pour lesquelles les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x-2 \\ 2x-1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x+4 \\ x-2 \end{pmatrix}$ sont colinéaires.

□ Exercice F16 (Alignement)

Déterminer les réels x tels que les trois points $M_1(1; x)$, $M_2(2, x^2)$ et $M_3(4, x^3)$ soient alignés.

□ Exercice F17 (Déterminant)

Soit ABC un triangle et G son centre de gravité (isobarycentre). On note I le milieu de $[BC]$.

Q1 Montrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.

Q2 Montrer que les trois petits triangles ABG , BCG et CGA ont la même surface.

(Indic: comparer les aires des triangles ABC et ABG en utilisant le déterminant de vecteurs commençant par A ...)

□ Exercice F18 (Droites remarquables d'un triangle)

Le but de cet exercice est de (re)démontrer que les médianes, les médiatrices ou les hauteurs d'un triangle du plan se rencontrent, puis de prouver que si ces trois points de concours ne sont pas confondus alors ils sont alignés.

Soit ABC un triangle du plan. On désigne par I le milieu de $[BC]$, par J le milieu de $[AC]$ et par K le milieu de $[AB]$.

Q1 Justifier que G le point de coordonnées $(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}, \frac{y_A+y_B+y_C}{3})$ appartient à chaque médiane de ABC .

Q2 Soit Ω le point d'intersection de la médiatrice de $[AB]$ et de la médiatrice de $[AC]$.

a. Montrer que $\overrightarrow{\Omega A} \cdot \overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}AB^2$ et prouver une expression similaire pour $\overrightarrow{\Omega A} \cdot \overrightarrow{AC}$.

b. Rappeler pourquoi $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$

c. En déduire que $\overrightarrow{\Omega I} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ et justifier que Ω appartient à la médiatrice de $[BC]$.

Q3 Soit H le point défini par $H = \Omega + \vec{u}$ où $\vec{u} = \overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{\Omega C}$

a. Montrer que $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{\Omega I}$

b. En déduire que $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$ et justifier que H appartient à la hauteur issue de A .

c. Donner des résultats similaires pour les hauteurs issues de B et C .

Q4 En utilisant les définitions de G et H ci-dessus, montrer que $\overrightarrow{\Omega H} = 3\overrightarrow{\Omega G}$.

Q5 Conclure.