CHAPITRE

$\mathcal{E}$

TSI[1]

Lycée Artaud

2025/2026

Calculs de limites

L'objectif de ce chapitre et de se familiariser avec les calculs de limites de fonctions.
On verra dans un chapitre ultérieur comment définir rigoureusement ce qu'est une limite.

Sommaire

I Premiers calculs

Rappel : on considère une fonction f définie sur un ensemble $\mathscr{D}$ qui associe à chaque réel $x \in \mathscr{D}$ un unique nombre réel noté $f(x)$.
Pour une valeur a (finie ou infinie) dans $\mathscr{D}$ ou sur *son bord*, il est souvent utile de savoir vers quelle valeur (finie ou infinie) se rapproche $f(x)$ lorsque x se rapproche de a. On dit que l'on calcule la *limite de f en a*.

I.1 Quelques fonctions de références

☐ ✍ Exercice E.1

Q 1 Soit p un entier strictement positif. Donner les limites en $+\infty$ et $-\infty$ des fonctions :

$$f_1(x) = x^{2p} \qquad f_2(x) = \frac{1}{x^{2p}} \qquad f_3(x) = x^{2p-1} \qquad f_4(x) = \frac{1}{x^{2p-1}}$$

Q 2 Donner la limite des fonctions aux bords de leur ensemble de définition :

$$g_1(x) = \mathrm{e}^x \qquad g_2(x) = \ln x \qquad g_3(x) = \sqrt{x}$$

☐ ✍ Exercice E.2

Soit p un entier strictement positif. Donner les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{2p}} \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^{2p}} \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{2p-1}} \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^{2p-1}}$$

Remarques – On retiendra que pour calculer une limite, on s'occupe de deux choses séparément :

son **signe** et sa **quantité**.

I.2 Opérations algébriques sur les limites

Propriété I.2.1 (opération algébriques)

Le comportement des limites avec les 4 opérations algébriques est « naturel », c'est à dire que le calcul de limite est compatible avec ces opérations.

☐ ✍ Exercice E.3

Q 1 Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} x^2+x+\frac{1}{x} \qquad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x}-x^2-\ln x \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-x}{\mathrm{e}^x+2} \qquad \lim_{x\to+\infty} \left(2-\frac{3}{x}\right)\left(-4+\frac{1}{x^2}\right)$$

Q 2 Déterminer les limites aux bornes de I pour les fonctions :

a. $f_1(x) = \dfrac{2}{x-3}$ avec $I =]3\,;+\infty[$ **b.** $f_2(x) = \dfrac{x+3}{(x-2)(x+2)}$ avec $I =]-2\,;2[$

On verra que dans certaines situation, cela ne se passe pas aussi bien et l'on tombe sur des formes dites indéterminées (voir plus loin). Mais avant cela, voyons ce qu'il se passe avec une cinquième opération, appelée la *composition de fonctions*.

I.3 Composition

Définition I.3.1

Si f et g sont deux fonctions, On note $f \circ g$ la fonction qui à x associe la quantité $f[g(x)]$. On dit que l'on a *composé* la fonction f avec g.
L'écriture $f \circ g$ se lit f « rond » g.

$$\begin{tikzcd} \boxed{x} \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f \circ g"'] & \boxed{g(x)} \arrow[r, "f"] & \boxed{f[g(x)]} \end{tikzcd}$$

ATTENTION ! – L'ordre de composition est important. Considérons par exemple f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$ et g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x - 1$. Donner les expressions de $f \circ g$ et $g \circ f$.

S1

ATTENTION ! – Il faudra prendre garde aux ensembles de définitions. Considérons par exemple f définie par $f(x) = \sqrt{x}$ et g définie par $g(x) = x - 1$. Donner les ensembles de définition des fonctions f, g, $f \circ g$ et $g \circ f$:

S2

Propriété I.3.2 (limite et composée)

a, b et c désignent des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$. Soit f et g deux fonctions.

$$\text{Si } \lim_{x \to a} f(x) = b \text{ et } \lim_{x \to b} g(x) = c, \text{ alors } \lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = c.$$

☐ ✍ **Exercice E.4**

Déterminer les limites aux bornes de I pour les fonctions f suivantes :

Q 1 $f(x) = \mathrm{e}^{-4x+1}$ avec $I = \mathbb{R}$

Q 2 $f(x) = \ln(-2x+1)$ avec $I = \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$

Q 3 $f(x) = \ln\left(\frac{3x+1}{2}\right)$ avec $I = \left]-\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$

Q 4 $f(x) = \sqrt{1+\frac{2}{x}}$ avec $I]0\,;+\infty[$

REMARQUES – Cela ne se passe pas toujours aussi bien. En effet, que peut-on dire de la limite en $+\infty$ de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+2}$?

S3

II Quelques formes indéterminées

ATTENTION ! – Les opérations sur les limites mènent parfois à des formes dites **indéterminées**. Voici schématiquement les cinq principales :

$$\frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad \infty \times 0 \qquad +\infty - \infty \qquad 1^{\infty}$$

Voyons dans les paragraphes suivants quelques méthodes pour *lever les indéterminations* et calculer la limite.

II.1 Fraction rationnelles

En règle générale, on commence par essayer de **factoriser la quantité qui semble prépondérante**. Cela se passe bien pour les fonctions polynômes et plus généralement pour les fractions rationnelles.

☐ ✍ **Exercice E.5**

Q 1 Déterminer les limites en $\pm\infty$ des fonctions :

$$f_1(x) = 3x^2 - x + 1 \qquad f_2(x) = -2x^4 - 5x^2 + 3x - 1 \qquad f_3(x) = x^3 - \sqrt{|x|}$$

Q 2 Déterminer les limites en $\pm\infty$ des fonctions :

$$g_1(x) = \frac{-3x^2 - 5x + 1}{x^3 - 2x + 2} \qquad g_2(x) = \frac{4x^3 + 2}{2x^2 + x + 1} \qquad g_3(x) = \frac{3x^2 + x - 1}{2x^2 + x + 1}$$

On pourra retenir un résultat du type : « **la limite d'une fraction rationnelle en $\pm\infty$ est égale à la limite de ses termes de plus haut degré** »

II.2 Limites de références

On pourra retenir par cœur les limites suivantes :

Propriété II.2.1 (limites de références)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \ldots\ldots \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \ldots\ldots \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = \ldots\ldots$$

En fait ces limites sont des cas particuliers de calculs de taux d'accroissements. On reverra dans le chapitre de dérivation que l'on a si f est dérivable :

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$$

Par exemple, ici avec $f(x)=\sin(x)$, cela donne $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{\sin(x)}{x} \longrightarrow f'(0) = \cos(0) = 1$.

☐ ✍ **Exercice E.6**

Calculer les limites suivantes en reconnaissant des taux d'accroissement :

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} \qquad \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}} \qquad \lim_{x\to +\infty} \sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

II.3 Croissances comparées

On doit aussi connaitre par cœur les limites suivantes, appelées *croissances comparées* car elles comparent les vitesses de croissance entre les fonctions exponentielles, logarithmes et puissances.

Propriété II.3.1 (croissances comparées)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ (et même pour $n \in \mathbb{Q}_+^*$) :

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^n}{\mathrm{e}^x} = \ldots\ldots \qquad \lim_{x\to -\infty} x^n\mathrm{e}^x = \ldots\ldots \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \ldots\ldots \qquad \lim_{x\to 0} x^n \ln x = \ldots\ldots$$

On pourra formellement retenir cette propriété en disant qu'au voisinage de l'infini l'exponentielle est prépondérante sue les fonctions puissances qui elles-même sont prépondérantes sur la fonction logarithme.

☐ ✍ **Exercice E.7**

Déterminer les limites aux bornes de I pour les fonctions f suivantes :

Q 1 $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 2}$ avec $I = \mathbb{R}$

Q 2 $f(x) = -x + \dfrac{3}{x} + \ln(x)$ avec $I =]0\,;+\infty[$

Q 3 $f(x) = (x-2)\mathrm{e}^x$ avec $I = \mathbb{R}$

Q 4 $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$ avec $I = \mathbb{R}$

Q 5 $f(x) = \dfrac{x\ln x}{x+1}$ avec $I =]0\,;+\infty[$

Q 6 $f(x) = \sqrt{x} - \ln x$ avec $I =]0\,;+\infty[$

III Théorme de comparaison

☺ Théorème III.0.1 (Gendarmes)

Soit f, g et h trois fonctions, et ℓ un réel.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \ell \\ \text{et pour } x \text{ assez grand } g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x) \end{cases} \implies \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$$

Remarques – Ce théorème s'étend au cas où ℓ vaudrait $\pm\infty$ et aussi pour x tendant vers $-\infty$ ou vers un réel.

☐ ✍ Exercice E.8

Q 1 La fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3\cos(x)+x}{x^2}$ admet-elle une limite en $+\infty$? Si oui la déterminer.

Q 2 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant 2-\cos x \leqslant 3$, puis en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{2-\cos x}$.

IV Des exos en vrac...

☐ ✍ Exercice E.9

Déterminer le limite en $+\infty$ de $f_1(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}$ et de $f_2(x) = \ln(x+1) - \ln x$.

☐ ✍ Exercice E.10

Donner (sans justifier) les limites proposées :

Q 1 $\lim\limits_{x\to-\infty} -3x^3 = \ldots\ldots$

Q 2 $\lim\limits_{x\to0^+} x^2 + \dfrac{1}{x^3} = \ldots\ldots$

Q 3 $\lim\limits_{x\to0^-} x^4 - \dfrac{1}{x^2} = \ldots\ldots$

Q 4 $\lim\limits_{x\to+\infty} -3x^2 - \dfrac{2}{x} = \ldots\ldots$

Q 5 $\lim\limits_{x\to+\infty} -3x^3\sqrt{x} = \ldots\ldots$

Q 6 $\lim\limits_{x\to0^+} -3x + \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \ldots\ldots$

Q 7 $\lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{1}{x^2-4} = \ldots\ldots$

Q 8 $\lim\limits_{x\to2^-} \dfrac{1}{x^2-4} = \ldots\ldots$

Q 9 $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^2+2\right)\left(x^5+\dfrac{1}{x}\right) = \ldots\ldots$

Q 10 $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{-3x+2}{-2x^2-x+3} = \ldots\ldots$

Q 11 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2-\dfrac{3}{x}\right)\left(-4+\dfrac{1}{x^2}\right) = \ldots\ldots$

Olivier BRÉBANT
Lycée Artaud – 2025/2026

☐ ✍ Exercice E.11

Donner les limites suivantes :

Q 1 $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 - 2x^2 + 3}{2x^3 + x - 2} = \ldots\ldots$

Q 2 $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2 - 3x + 3}{2x^3 + x^2 + 2} = \ldots\ldots$

Q 3 $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^4 - 3x^2 + 3x - 1}{x^3 + x^2 + 3x - 2} = \ldots\ldots$

Q 4 $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{|3x^3 - 2x^2 + 1|}{x^3 + 10x^2 + x - 2} = \ldots\ldots$

☐ ✍ Exercice E.12

Déterminer si elles existent les limites suivantes :

Q 1 $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{1 + \dfrac{1}{x^3}}$

Q 2 $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{2x+3}{4x-1}}$

Q 3 $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$

☐ ✍ Exercice E.13

Déterminer les limites aux bornes de I pour les fonctions suivantes :

Q 1 $f_1(x) = \ln(-2x + 1)$ où $I = \left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right[$

Q 2 $f_2(x) = \ln\left(\dfrac{3x+1}{x-1}\right)$ où $I =]1\,;+\infty[$

Q 3 $f_3(x) = \sqrt{1 + \dfrac{2}{x}}$ où $I =]0\,;+\infty[$

Q 4 $f_4(x) = e^{\frac{2x+1}{x-1}}$ où $I =]1\,;+\infty[$

Q 5 $f_5(x) = e^{-x^4 + \frac{1}{x}}$ où $I =]0\,;+\infty[$

Q 6 $f_6(x) = \dfrac{x+5}{x^2 - 1}$ où $I =]-1\,;1[$

☐ ✍ Exercice E.14

Déterminer les limites aux bornes de I pour les fonctions suivantes :

Q 1 $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x - 3x^2 - 3$

Q 2 $\lim\limits_{x \to -\infty} x e^{x^2}$

Q 3 $\lim\limits_{x \to +\infty} x\sqrt{x}\left(e^{-x}\right)^3$

Q 4 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - \ln(x)}{\ln(x) - x}$

Q 5 $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} - \ln(x)$

Q 6 $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) - x^2$

Q 7 $\lim\limits_{x \to +\infty} x\ln(x) - 3x + 2$

Q 8 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - 4}{e^x + x}$

Q 9 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{e^x}$