Travail de Noël

Pas de gros travail pour ces vacances, car vous avez besoin de vous reposer. Mais cela ne veut pas dire qu'il faut oublier les maths ! Voici donc un petit travail de Noël, **à faire tranquillement pendant les vacances**.

Exercice I (COMPLEXES)

Pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$ on pose $f(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$.

L'objectif est de montrer par trois méthodes différentes la propriété :

$$(P): \ |z| = 1 \implies f(z) \in i\mathbb{R}$$

Les trois questions sont indépendantes.

Q 1 *Méthode 1:* en utilisant la forme algébrique (on pose $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$).

▶ **Réponse :**

$$f(z) = \frac{1+a+ib}{1-a-ib} = \frac{(1+a+ib)(1-a+ib)}{(1-a-ib)(1-a+ib)} = \frac{1-a^2-b^2+i2b}{(1-a)^2+b^2+1}$$

or $|z| = 1 \iff a^2 + b^2 = 1$, donc le numérateur devient $i2b$ qui est imaginaire pur.

Q 2 *Méthode 2:* en utilisant les conjugués *(et donc sans utiliser la forme algébrique).*

▶ **Réponse :**

On calcule :

$$\overline{f(z)} = \overline{\left(\frac{1+z}{1-z}\right)} = \frac{1+\overline{z}}{1-\overline{z}}$$

or $|z| = 1 \iff \overline{z} = \dfrac{1}{z}$, donc

$$\overline{f(z)} = \frac{1+\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}} = \frac{\frac{z+1}{z}}{\frac{z-1}{z}} = \frac{z+1}{z-1} = \frac{-(1+z)}{-(1-z)} = -\frac{1+z}{1-z} = -f(z)$$

Ainsi $\overline{f(z)} = -f(z)$, ce qui signifie que $f(z)$ est imaginaire pur.

Q 3 *Méthode 3:* en utilisant la forme exponentielle (on pose $z = e^{i\theta}$ et on utilise la technique de l'arc moitié pour factoriser $1 + z$ et $1 - z$).

▶ **Réponse :**

On calcule :

$$f(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta}+1}{e^{i\theta}-1} = \frac{e^{i\theta/2}(e^{i\theta/2}+e^{-i\theta/2})}{e^{i\theta/2}(e^{i\theta/2}-e^{-i\theta/2})} = \frac{\cos(\theta/2)}{i\sin(\theta/2)}$$

qui est bien imaginaire pur.

Exercice II (SOMMES)

Pour tout entier naturel n non nul, on définit : $A_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}}$

Q 4 Soit k un entier naturel. Développer l'expression $(k^2 + k + 1)^2$

▶ **Réponse :**

On a :
$$(k^2+k+1)^2 = k^4+2k^3+3k^2+2k+1$$

Q 5 Prouver que pour tout entier naturel k non nul : $\sqrt{1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}} = \frac{k^2+k+1}{k(k+1)}$

▶ **Réponse :**

On a :
$$\sqrt{1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}} = \sqrt{\frac{k^2(k+1)^2+(k+1)^2+k^2}{k^2(k+1)^2}} = \frac{\sqrt{k^4+2k^3+3k^2+2k+1}}{k(k+1)}$$
Or, d'après la question précédente, le numérateur est égal à k^2+k+1, donc le résultat.

Q 6 Déterminer un couple de réels (a, b) tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\frac{k^2+k+1}{k(k+1)} = 1+\frac{a}{k}+\frac{b}{k+1}$

▶ **Réponse :**

On cherche a et b tels que :
$$\frac{k^2+k+1}{k(k+1)} = 1+\frac{a}{k}+\frac{b}{k+1} = \frac{k(k+1)+a(k+1)+bk}{k(k+1)} = \frac{k^2+(1+a+b)k+a}{k(k+1)}$$
En identifiant les numérateurs, on obtient le système :
$$\begin{cases} 1+a+b=1 \\ a=1 \end{cases}$$
dont la solution est $a=1$ et $b=-1$.

Q 7 Calculer la somme : $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

▶ **Réponse :**

On a :
$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
Tous les termes s'annulent par télescopage, sauf le premier et le dernier, donc :
$$S_n = 1-\frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

Q 8 En déduire l'expression de A_n en fonction de n.

▶ **Réponse :**

On a :
$$A_n = \sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}} = \sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n}1+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = n+S_n = n+\frac{n}{n+1}$$

Exercice III (PYTHON - Tortue de Noël)

L'objectif de cet travail est de bien apprivoiser l'utilisation de fonctions en Python, en utilisant des dessins...

Q 9 Un peu de Python :

▶ **Réponse :**

Lien capytale vers la correction python du travail sur la Tortue de Noël