

# TRAVAIL DE NOËL

Pas de gros travail pour ces vacances, car vous avez besoin de vous reposer. Mais cela ne veut pas dire qu'il faut oublier les maths ! Voici donc un petit travail de Noël, à **faire tranquillement pendant les vacances**.

## Exercice I (COMPLEXES)

Pour tout  $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$  on pose  $f(z) = \frac{1+z}{1-z}$ .

L'objectif est de montrer par trois méthodes différentes la propriété :

$$(P) : |z| = 1 \implies f(z) \in i\mathbb{R}$$

Les trois questions sont indépendantes.

**Q1** *Méthode 1*: en utilisant la forme algébrique (on pose  $z = a + ib$  avec  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ).

**Q2** *Méthode 2*: en utilisant les conjugués (*et donc sans utiliser la forme algébrique*).

**Q3** *Méthode 3*: en utilisant la forme exponentielle (on pose  $z = e^{i\theta}$  et on utilise la technique de l'arc moitié pour factoriser  $1+z$  et  $1-z$ ).

## Exercice II (SOMMES)

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on définit :  $A_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}}$

**Q4** Soit  $k$  un entier naturel. Développer l'expression  $(k^2 + k + 1)^2$

**Q5** Prouver que pour tout entier naturel  $k$  non nul :  $\sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}} = \frac{k^2 + k + 1}{k(k+1)}$

**Q6** Déterminer un couple de réels  $(a, b)$  tel que, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  :  $\frac{k^2 + k + 1}{k(k+1)} = 1 + \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$

**Q7** Calculer la somme :  $S_n = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$

**Q8** En déduire l'expression de  $A_n$  en fonction de  $n$ .

## Exercice III (PYTHON - Tortue de Noël)

L'objectif de cet travail est de bien apprivoiser l'utilisation de fonctions en Python, en utilisant des dessins...

**Q9** Faire les exercices 1 à 4 de [notebook capytale : Tortue de Noël](#). Si le lien ne s'ouvre pas, vous pouvez aller sur Capytale et saisir le code 4194-839572 pour accéder au notebook.

Les plus aguerris pourront aussi tenter l'exercice 5

## Exercice IV

Se préparer pour un petit QCM à la rentrée sur les chapitres Sommes (L) et Complexes (M).