Correct° DM
février 2026

Exo 1 :

Q1. Équation paramétrique de P :

$$P : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 - 2t + t' \\ z = 6 + 3t - t' \end{cases}, \quad (t, t') \in \mathbb{R}^2$$

Q2. Un vecteur normal à P est donné par

$$\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Comme $A \in P$ on déduit :

$$P : -(x-2) + (y+3) + (z-6) = 0$$

$$P : -x + y + z - 1 = 0$$

Q3 a On remplace : $-(-2) + 3 + 5 - 1 = 9 \neq 0$

Donc $B \notin P$

Q3 b. Le projeté orthogonal $H(x, y, z)$ est déterminé par :

$$\begin{cases} H \in P & (1) \\ \vec{BH} \perp P & (2) \end{cases}$$

(1) Donne : $-x + y + z = 1$

(2) $\vec{BH} = \lambda \vec{n}$ où $\vec{n}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal à P.

$$\begin{pmatrix} x+2 \\ y-3 \\ z-5 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} x = -2 - \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 5 + \lambda \end{cases}$$

On reporte dans (1) :

$$2 + \lambda + 3 + \lambda + 5 + \lambda = 1 \iff 3\lambda = -9 \iff \lambda = -3$$

D'où $H(1, 0, 2)$

Q4 Le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$ a pour vecteur normal $\vec{k}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Le plan P a pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- La droite D est dirigée par le vecteur $\vec{u}' = \vec{n} \wedge \vec{k}$

$$\vec{u}' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Le point $C(0, 1, 0)$ est sur D (à la fois sur P et sur $(O, \vec{i}, \vec{j})$)

D'où l'éq. param. de D : $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 0 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$

Q5. Les droites D' et D'' sont coplanaires ssi les vecteurs $\vec{u}'$, $\vec{w}$ et $\vec{AB}\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont coplanaires. On peut calculer le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ -2 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 8 + 54 - 0 - 6 - 6 \neq 0$$

Donc D' et D'' ne sont pas coplanaires

Exo II :

Q6. • $\mathcal{F}$ ne peut pas être génératrice car il y a 3 vecteurs dans $\mathbb{R}^4$.

• Pour la liberté on considère la comb. linéaire :

$$a u_1 + b u_2 + c u_3 = 0$$

Version matrice : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & -12 \\ 5 & -4 & 37 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & -9 & 27 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Le système est de rang 2 (avec 3 inconnues), donc admet une infinité de solutions. La famille $\mathcal{F}$ n'est pas libre, elle est liée.

Q7. On cherche une condition nécessaire et suff. sur x, y, z, t $\forall$ pour que le système ci-dessous soit compatible :

$$a u_1 + b u_2 + c u_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

Version matricielle : $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x \\ -3 & -1 & -12 & y \\ 5 & -4 & 37 & z \\ 2 & 3 & 1 & t \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x \\ 0 & 2 & -6 & y+3x \\ 0 & -9 & 27 & z-5x \\ 0 & 1 & -3 & t-2x \end{array}\right)$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & -3 & (y+3x)/2 \\ 0 & 0 & 0 & z-5x+\frac{9}{2}(y+3x) \\ 0 & 0 & 0 & t-2x-(y+3x) \end{array}\right)$

Le syst. est compatible ssi : $\begin{cases} 2z - 10x + 9y + 27x = 0 \\ t - 2x - y - 3x = 0 \end{cases}$

Ainsi une éq. cart. de $\mathcal{F}$: $\begin{cases} 17x + 9y + 2z = 0 \\ -5x - y + t = 0 \end{cases}$

Q8. Cette fois-ci on résout le système :

$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ y + z - t = 0 \end{cases}$ Le syst. est déjà échelonné. Prenons z et t comme paramètres.

On a : $\begin{cases} x = z - t + z = 2z - t \\ y = t - z \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Conclusion : $\mathcal{F}' = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$