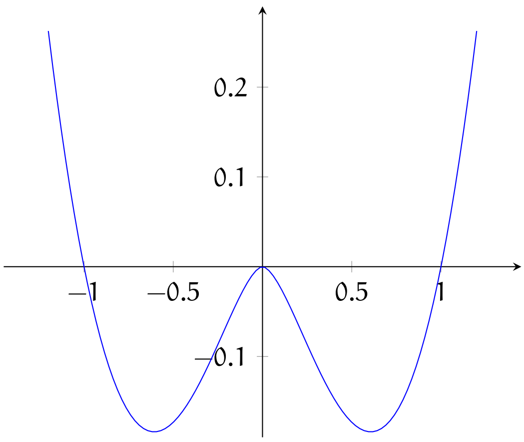
Interrogation cours N°7 (45')
Continuité et dérivabilité

Important ! On rappelle que l'utilisation des théorèmes d'analyse implique une ***rédaction soignée*** *avec la présence de toutes les hypothèses. La notation en tiendra compte !*

Exercice I

On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2 \ln|x|$ dont la représentation graphqiue est donnée ci-dessous :



Q 1 Quel est l'ensemble de définition de f ? Justifier.

> ▶ **Réponse :**
>
> $f(x)$ existe si et seulement si $|x| > 0$, ainsi $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^*$

Q 2 Justifier que f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$. On notera toujours f cette nouvelle fonction qui est maintenant définie et continue sur $\mathbb{R}$.

> ▶ **Réponse :**
>
> Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, donc f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

Q 3 Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer $f'(0)$.

> ▶ **Réponse :**
>
> - D'abord, par opérations sur fonctions de références, on peut dire que f est dérivable (même $\mathscr{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}^*$.
> - En 0, on étudie le taux d'accroissement :
>
> $$T_0(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x\ln(|x|)$$
>
> On a bien $T_0(x)$ qui tend vers 0 lorsque x tend vers 0, ce qui signifie que : $\boxed{f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f'(0) = 0}$.

Q 4 Cette fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$? Justifier.

> ▶ **Réponse :**
>
> On a vu que f était $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$. Voyons en 0 :
>
> - Pour tout $x > 0$ on a : $f'(x) = 2x\ln(x) + x$.
> - Pour tout $x < 0$ on a : $f'(x) = 2x\ln(-x) + x$.

On a donc dans tous les cas, par croissance comparée, $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0 = f'(0)$. Ce qui signifie que f' est continue en 0.
Conclusion : $\boxed{f \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$

Q 5 f est-elle de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$?

▶ **Réponse :**

Pour tout $x > 0$, $f''(x) = 2\ln(x) + 3$. Donc $\lim_{x\to 0^+} f''(x) = +\infty$.

Donc $\boxed{f \text{ ne peut pas être } \mathscr{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}}$.

Exercice II

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$. On suppose que $f(0) = 0$ et que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [0;1]$.

Q 6 Montrer en citant avec soin le théorème utilisé, que f' est minorée sur $[0;1]$ par un réel $m > 0$.

▶ **Réponse :**

Puisque f est de classe $\mathscr{C}^1$, la fonction f' est continue sur le segment $[0;1]$, elle admet donc un minimum m sur ce segment. De plus, pour tout $x \in [0;1]$, on a $f'(x) > 0$. Par conséquent, ce minimum est strictement positif. Ainsi, il existe un réel $m > 0$ tel que pour tout $x \in [0;1]$, on a $f'(x) \geqslant m$.

Q 7 Montrer en citant avec soin le théorème utilisé, que pour tout $x \in [0;1]$, on a $f(x) \geqslant mx$.

▶ **Réponse :**

Pour un $x \in [0;1]$ on va appliquer le théorème des accroissements finis sur $[0;x]$.
La fonction f est continue sur $[0;x]$ et dérivable sur $]0;x[$. Par le théorème des accroissements finis, pour tout $x \in]0;1[$, il existe $\alpha_x \in]0;x[$ tel que $f(x) - f(0) = f'(\alpha_x)(x - 0)$. Donc $f(x) = f'(\alpha_x)x$.
Or, pour tout $x \in [0;1]$, on a $\alpha_x \in]0;x[\subset [0;1]$, donc $f'(\alpha_x) \geqslant m$. Par conséquent, pour tout $x \in [0;1]$, on a $f(x) \geqslant mx$.

Q 8 Montrer en citant avec soin le théorème utilisé, qu'il existe un réel $c \in]0,1[$ tel que $f(c) = 1 - c$.

▶ **Réponse :**

On considère la fonction $g(x) = f(x) - (1 - x)$. Alors g est continue sur $[0;1]$. De plus, $g(0) = f(0) - 1 = -1$ et $g(1) = f(1) - 0 \geqslant m > 0$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in]0,1[$ tel que $g(c) = 0$, c'est-à-dire $f(c) = 1 - c$.

Exercice III

On note l'intervalle $I = [0, +\infty[$ et on considère la fonction f définie pour tout $x \in I$ par $f(x) = \cos^2(x) \times (1 - e^{-x})$.

Q 9 On pose pour tout $x \in I$, $g(x) = 1 - e^{-x}$.
En étudiant les variations de g, montrer que pour tout $x \in I$, on a $0 \leqslant g(x) \leqslant 1$.

▶ **Réponse :**

La fonction g est dérivable sur I et on a $g'(x) = e^{x} > 0$. Donc g est strictement croissante sur I. De plus, $g(0) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1$. Par conséquent, pour tout $x \in I$, on a $0 \leqslant g(x) \leqslant 1$.

Q 10 En déduire que $f(I) \subset [0;1]$.

▶ **Réponse :**

Pour tout $x \in I$, on a $f(x) = \cos^2(x) \times g(x)$. Or, pour tout $x \in I$, on a $0 \leqslant \cos^2(x) \leqslant 1$ et $0 \leqslant g(x) \leqslant 1$. Par conséquent, pour tout $x \in I$, on a $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$, c'est-à-dire $f(I) \subset [0;1]$.

Q 11 Montrer que f admet un minimum sur I et le déterminer.

▶ **Réponse :**

On a vu que 0 est un minorant de la fonction f. Or $f(0) = 0$, donc ce minorant est atteint, c'est donc le minimum de f sur I.

Q 12 Montrer que : $\sup_{x \in I} f(x) = 1$

▶ **Réponse :**

On a vu que 1 est un majorant de la fonction f. Montrons que c'est le plus petit : En prenant la suite $x_n = 2n\pi$ pour $n \in \mathbb{N}$, on trouve que $f(x_n) = 1 - e^{-2n\pi}$. En faisant tendre n vers $+\infty$, on trouve que $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = 1$.
Par conséquent, $\sup_{x \in I} f(x) = 1$.

Q 13 Ce sup est-il un maximum pour f ? Justifier.

▶ **Réponse :**

Ce sup n'est pas un maximum pour f car pour tout $x \in I$, on a $f(x) < 1$. En effet, $f(x) = \cos^2(x) \times g(x)$ avec $0 \leqslant \cos^2(x) \leqslant 1$ et $0 \leqslant g(x) < 1$. Par conséquent, pour tout $x \in I$, on a $f(x) < 1$.

Q 14 Déduire des questions précédentes quel est l'ensemble $f([0, +\infty[)$.

▶ **Réponse :**

f est continue sur I qui est un intervalle, donc $f(I)$ est aussi un intervalle dont les bords sont $\inf f = 0$ et $\sup f = 1$. Or la borne inférieure est atteinte (minimum) mais la borne supérieure n'est pas atteinte.
On déduit alors que, $f(I) = [0; 1[$.