

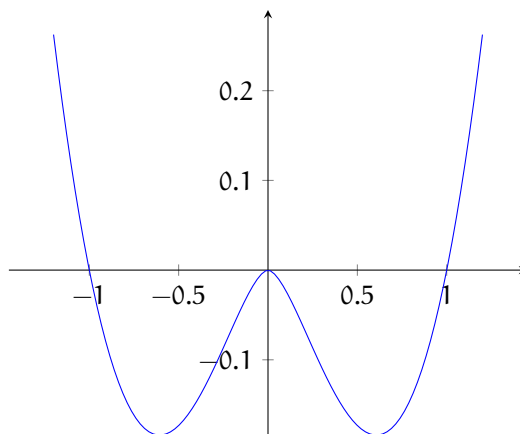
# INTERROGATION COURS N°7 (45')

## CONTINUITÉ ET DÉRIVABILITÉ

*Important ! On rappelle que l'utilisation des théorèmes d'analyse implique une rédaction soignée avec la présence de toutes les hypothèses. La notation en tiendra compte !*

### Exercice I

On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x^2 \ln|x|$  dont la représentation graphique est donnée ci-dessous :



- Q1** Quel est l'ensemble de définition de  $f$  ? Justifier.
- Q2** Justifier que  $f$  est prolongeable par continuité en  $0$  en posant  $f(0) = 0$ . On notera toujours  $f$  cette nouvelle fonction qui est maintenant définie et continue sur  $\mathbb{R}$ .
- Q3** Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et déterminer  $f'(0)$ .
- Q4** Cette fonction  $f$  est-elle de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  ? Justifier.
- Q5**  $f$  est-elle de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$  ?

### Exercice II

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0; 1]$ . On suppose que  $f(0) = 0$  et que  $f'(x) > 0$  pour tout  $x \in [0; 1]$ .

- Q6** Montrer en citant avec soin le théorème utilisé, que  $f'$  est minorée sur  $[0; 1]$  par un réel  $m > 0$ .
- Q7** Montrer en citant avec soin le théorème utilisé, que pour tout  $x \in [0; 1]$ , on a  $f(x) \geq mx$ .
- Q8** Montrer en citant avec soin le théorème utilisé, qu'il existe un réel  $c \in ]0, 1[$  tel que  $f(c) = 1 - c$ .

### Exercice III

On note l'intervalle  $I = [0, +\infty[$  et on considère la fonction  $f$  définie pour tout  $x \in I$  par  $f(x) = \cos^2(x) \times (1 - e^{-x})$ .

- Q9** On pose pour tout  $x \in I$ ,  $g(x) = 1 - e^{-x}$ .  
En étudiant les variations de  $g$ , montrer que pour tout  $x \in I$ , on a  $0 \leq g(x) \leq 1$ .
- Q10** En déduire que  $f(I) \subset [0; 1]$ .
- Q11** Montrer que  $f$  admet un minimum sur  $I$  et le déterminer.
- Q12** Montrer que :  $\sup_{x \in I} f(x) = 1$
- Q13** Ce sup est-il un maximum pour  $f$  ? Justifier.
- Q14** Déduire des questions précédentes quel est l'ensemble  $f([0, +\infty[)$ .