

# INTERROGATION COURS N°6 (1H)

## Exercice I

Répondre par Vrai ou Faux en cochant la case correspondante.

Aucune justification n'est demandée.

Barème : +1 si juste, -1 si faux, 0 si pas de réponse.

	Vrai	Faux
a. Toute suite bornée est convergente.....	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
b. Toute suite convergente est bornée.....	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
c. Une suite divergente est nécessairement non bornée.....	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
d. Toute suite monotone est convergente.....	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
e. Une suite monotone et bornée peut diverger.....	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

## Exercice II

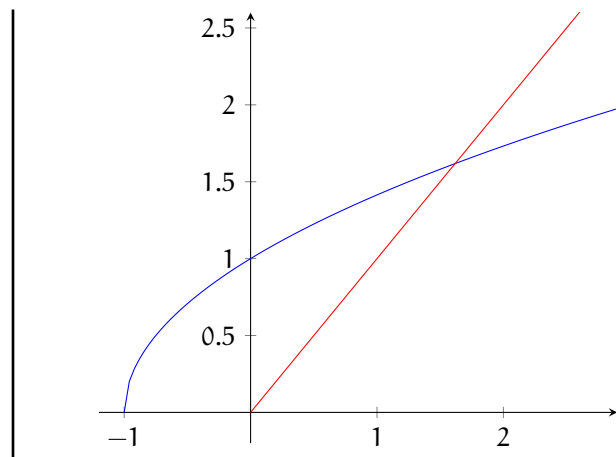
On considère la suite  $(u_n)$  définie par

$$u_0 = -\frac{1}{2} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$$

On a représenté sur le graphique ci-contre la courbe représentative de la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \sqrt{x + 1}$$

ainsi que la droite d'équation  $y = x$ .



**Q1** Montrer que l'équation  $f(x) = x$  admet pour unique solution le réel :  $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ .

► Réponse :

L'équation  $f(x) = x$  est équivalente à  $x^2 - x - 1 = 0$ . Le discriminant de ce polynôme est  $\Delta = 5$ . Les solutions sont donc  $x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$  et  $x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ . Or,  $f(x) = \sqrt{x + 1}$  est défini pour  $x \geq -1$  et prend des valeurs positives. Par conséquent, la seule solution de l'équation  $f(x) = x$  est  $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ .

- Q2 a.** Représenter sur la figure précédente (en laissant les traits de construction sur le graphique) les termes  $u_0$ ,  $u_1$  et  $u_2$ .
- b.** Quelles conjectures pouvez-vous faire quant au sens de variation de la suite  $(u_n)$  et à sa limite éventuelle ?

► Réponse :

On conjecture que la suite  $(u_n)$  est croissante et converge vers  $\alpha$ .

**Q3** On note  $I = [-1; 2]$ . En étudiant les variations de la fonction  $f$  sur  $I$ , montrer que  $f(I) \subset I$  et en déduire que la suite  $(u_n)$  est bien définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

## ► Réponse :

La fonction  $f$  est croissante sur  $I$  (composée de fonctions croissantes).

Donc  $f(I) = f([-1; 2]) = [f(-1); f(2)] = [0; \sqrt{3}] \subset I$ .

Comme  $u_0 = -\frac{1}{2} \in I$ , on en déduit par récurrence immédiate, que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in I$  et la suite  $(u_n)$  est ainsi bien définie.

**Q 4** Déterminer avec soin le sens de variation de la suite  $(u_n)$ .

## ► Réponse :

On a  $u_1 - u_0 = \sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} > 0$ . Supposons que  $u_n > u_{n-1}$  pour un certain  $n \geq 1$ . Alors  $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - f(u_{n-1}) > 0$  car  $f$  est croissante. Par récurrence, la suite  $(u_n)$  est croissante.

**Q 5** Justifier alors que  $(u_n)$  est convergente.

## ► Réponse :

La suite  $(u_n)$  est croissante et majorée par 2, elle est donc convergente vers  $\ell \leq 2$ .

**Q 6** Déterminer sa limite.

## ► Réponse :

Dans la relation de récurrence, on fait tendre  $n$  vers  $+\infty$ . Cela donne par opérations et compositions de limites :  $\ell = \sqrt{\ell + 1}$ . Ainsi  $\ell$  est solution de l'équation  $f(x) = x$ . Or, on a montré que cette équation admet pour unique solution  $\alpha$ . Par conséquent, la suite  $(u_n)$  converge vers  $\alpha$ .

### Exercice III

Soit  $u_0 = 3$  et  $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{u_n - 2}$ .

**Q 7** Montrer par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n > 2$ .

## ► Réponse :

Initialisation :  $u_0 = 3 > 2$ .

Hérédité : supposons que  $u_n > 2$  pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ .

Alors  $u_{n+1} - 2 = \frac{u_n^2 + 1}{u_n - 2} - 2 = \frac{u_n^2 + 1 - 2(u_n - 2)}{u_n - 2} = \frac{u_n^2 - 2u_n + 5}{u_n - 2}$ .

Or le discriminant du numérateur est négatif ( $\Delta = -16 < 0$ ), donc le numérateur est strictement positif.

De plus, le dénominateur est positif (car  $u_n > 2$ ).

Ainsi  $u_{n+1} - 2 > 0$ , ce qui signifie  $u_{n+1} > 2$ .

**Q 8** Étudier le sens de variation de  $(u_n)$ .

## ► Réponse :

On a  $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 + 1}{u_n - 2} - u_n = \frac{u_n^2 + 1 - u_n(u_n - 2)}{u_n - 2} = \frac{2u_n + 1}{u_n - 2}$ .

Comme  $u_n > 2$ , le dénominateur est positif. De plus, le numérateur est strictement positif.

Par conséquent,  $u_{n+1} - u_n > 0$  et la suite  $(u_n)$  est croissante.

**Q 9** Démontrer que  $(u_n)$  ne peut converger vers aucun réel.

## ► Réponse :

Supposons par l'absurde que  $(u_n)$  converge vers un réel  $\ell$ . En faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$  dans la relation de récurrence, on trouve que  $\ell = \frac{\ell^2 + 1}{\ell - 2}$ , ce qui est équivalent à  $2\ell + 1 = 0$ . Donc  $\ell = -\frac{1}{2}$ . Or,  $(u_n)$  est minorée

par 2, donc  $\ell \geq 2$ . Contradiction.

Par conséquent, la suite  $(u_n)$  ne peut pas converger vers un réel.

**Q 10** En déduire le comportement de la suite  $(u_n)$  à l'infini.

► Réponse :

Puisque  $(u_n)$  est croissante, elle admet une limite finie ou infinie. Or d'après la question précédente cette limite ne peut pas être finie. Par conséquent, la suite  $(u_n)$  diverge vers  $+\infty$ .

### Exercice IV

**Q 11** Effectuer les produits possibles entre les matrices A et B suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

► Réponse :

Les deux produits sont définis et on a :

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -7 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

et

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 1 \\ -6 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

**Q 12** En utilisant la méthode de votre choix, déterminer l'inverse éventuel de la matrice :

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

► Réponse :

On trouve que M est inversible et on a :

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 11 & 6 \\ -2 & 9 & 5 \\ 1 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

**Q 13** On considère la matrice  $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Conjecturer une expression de  $C^n$  pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , puis la démontrer par récurrence.

► Réponse :

On a  $C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $C^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $C^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , etc. On conjecture que  $C^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Le cas de base  $n = 1$  est vérifié. Supposons que  $C^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  pour un certain  $n \geq 1$ .

Alors  $C^{n+1} = C^n C = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , ce qui conclut la récurrence.

**Q 14** En utilisant la méthode du binôme de Newton, retrouver l'expression de  $C^n$ .

► Réponse :

On constate que  $C = I + N$  où  $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Comme  $N^2 = 0$ , on a  $C^n = (I + N)^n = I + nN$  d'où  $C^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .