

INTERROGATION COURS N°6 (1H)

Exercice I

Répondre par **Vrai** ou **Faux** en cochant la case correspondante.

Aucune justification n'est demandée.

Barème : +1 si juste, -1 si faux, 0 si pas de réponse.

	Vrai	Faux
a. Toute suite bornée est convergente.....	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
b. Toute suite convergente est bornée.....	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
c. Une suite divergente est nécessairement non bornée.....	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
d. Toute suite monotone est convergente.....	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
e. Une suite monotone et bornée peut diverger.....	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Exercice II

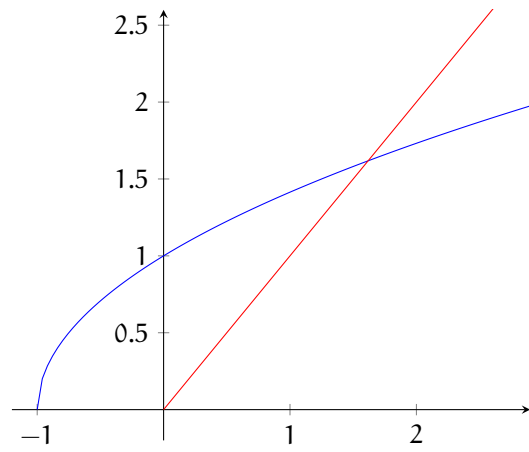
On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = -\frac{1}{2} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$$

On a représenté sur le graphique ci-contre la courbe représentative de la fonction f définie par

$$f(x) = \sqrt{x + 1}$$

ainsi que la droite d'équation $y = x$.



Q 1 Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet pour unique solution le réel : $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Q 2 a. Représenter sur la figure précédente (en laissant les traits de construction sur le graphique) les termes u_0 , u_1 et u_2 .

b. Quelles conjectures pouvez-vous faire quant au sens de variation de la suite (u_n) et à sa limite éventuelle ?

Q 3 On note $I = [-1; 2]$. En étudiant les variations de la fonction f sur I , montrer que $f(I) \subset I$ et en déduire que la suite (u_n) est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Q 4 Déterminer avec soin le sens de variation de la suite (u_n) .

Q 5 Justifier alors que (u_n) est convergente.

Q 6 Déterminer sa limite.

Exercice III

Soit $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{u_n - 2}$.

Q 7 Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 2$.

Q 8 Étudier le sens de variation de (u_n) .

Q 9 Démontrer que (u_n) ne peut converger vers aucun réel.

Q 10 En déduire le comportement de la suite (u_n) à l'infini.

Exercice IV

Q 11 Effectuer le seul produit possible entre les matrices A et B suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Q 12 En utilisant la méthode de votre choix, déterminer l'inverse éventuel de la matrice :

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Q 13 On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Conjecturer une expression de C^n pour tout entier naturel $n \geq 1$, puis la démontrer par récurrence.

Q 14 En utilisant la méthode du binôme de Newton, retrouver l'expression de C^n .