

INTERROGATION COURS N°4 (1H)

Important ! Il sera tenu compte de la qualité de présentation/rédaction de votre copie.

Les calculatrices NE sont PAS autorisées.

Exercice I

Q1 Résoudre dans \mathbb{R} : $\sin(2x) = \cos(x)$, puis donner les solutions dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$.

► Réponse :

$$\sin(2x) = \cos(x) \iff \sin(2x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

D'où

$$2x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 2x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2k\pi$$

C'est à dire :

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

Dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$, on trouve les solutions :

$$x = -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$$

Q2 Résoudre dans $I = [0, 2\pi[$ l'inéquation : $\cos(x) \geq \frac{1}{2}$.

► Réponse :

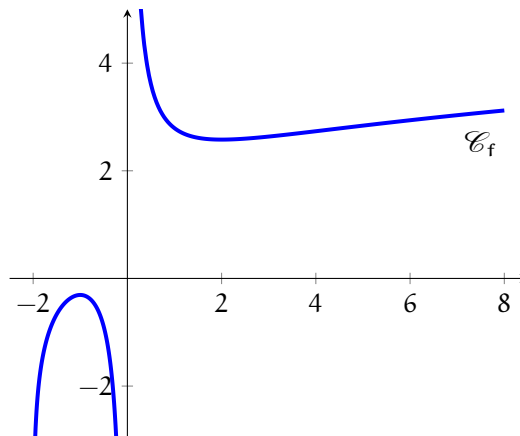
En s'appuyant sur le cercle trigonométrique, on déduit que

$$x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}; 2\pi\right]$$

Exercice II

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(2x + 4)$ dont la représentation graphique \mathcal{C}_f est donnée ci-dessous.

Attention toutefois, car aucune réponse ne doit être obtenue par lecture graphique !



Q3 Déterminer soigneusement son ensemble de définition \mathcal{D}_f , et justifier pourquoi f n'est ni paire, ni impaire.

► Réponse :

Il faut $x \neq 0$ et $2x + 4 > 0$, ce qui se traduit par $\mathcal{D}_f =]-2; 0[\cup]0; +\infty[$.

\mathcal{D}_f n'est pas symétrique par rapport à 0, donc f ne peut être ni paire ni impaire.

Q4 Déterminer les limites de f aux bornes de \mathcal{D}_f , Puis faire une interprétation graphique de ces limites en termes d'asymptotes.

► Réponse :

Il n'y a aucune difficulté (pas de FI) pour trouver :

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

On en déduit que \mathcal{C}_f admet les asymptotes suivantes :

- La droite d'équation $x = -2$ est une asymptote verticale en $x = -2$.
- La droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale en $x = 0$.

Q5 Montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f'(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2(x + 2)}$

► Réponse :

f est dérivable sur \mathcal{D}_f comme somme de fonctions dérivables.

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{2x + 4} = \frac{-(2x + 4) + 2x^2}{x^2(2x + 4)} = \frac{x^2 - x - 2}{x^2(x + 2)}$$

Q6 Déterminer le tableau de variations de f .

► Réponse :

On étudie le signe de f' pour déterminer les variations de f .

- Le dénominateur est positif car c'est le produit d'un carré et de $(x + 2)$ qui est positif car $x > -2$.
- Le numérateur est un trinôme du second degré de discriminant $\Delta = 9$, qui s'annule pour $x = -1$ et $x = 2$. Son signe est positif à l'extérieur des racines. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	-2	-1	0	2	$+\infty$		
s. de $f'(x)$		+	0	-	0	+	
v. de f	$-\infty$	\nearrow	$f(-1)$	\searrow	$-\infty$	\nearrow	$+\infty$
							$f(2)$

Q7 Déterminer l'équation de la tangente \mathcal{T}_1 à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 1.

► Réponse :

On a $f'(1) = \frac{-2}{3}$ et $f(1) = 1 + \ln(6)$, d'où $\mathcal{T}_1 : y = \frac{-2}{3}(x - 1) + 1 + \ln 6$.

Q8 \mathcal{C}_f admet-elle d'autres tangentes parallèles à \mathcal{T}_1 ? Si oui en quels points ?

► Réponse :

La question revient à chercher les solutions de l'équation $f'(x) = -\frac{2}{3}$. On souhaite donc résoudre sur \mathcal{D}_f :

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - x - 2}{x^2(x+2)} &= -\frac{2}{3} \\ \Leftrightarrow 3(x^2 - x - 2) &= -2x^2(x+2) \\ \Leftrightarrow 2x^3 + 7x^2 - 3x - 6 &= 0 \end{aligned}$$

On sait (d'après la question précédente) que 1 est solution évidente, on peut donc factoriser par $(x-1)$. L'équation devient :

$$(x-1)(2x^2 + 9x + 6) = 0$$

Le discriminant du trinôme vaut $\Delta = 81 - 48 = 33$. On obtient donc deux solutions supplémentaires $x = \frac{-9 + \sqrt{33}}{4}$ et $x = \frac{-9 - \sqrt{33}}{4}$.

Parmi ces deux solutions, seule $\frac{-9 + \sqrt{33}}{4} \in \mathcal{D}_f$.

Conclusion : il existe une et une seule tangente à \mathcal{C}_f parallèle à \mathcal{T}_1 , elle se situe au point d'abscisse $\frac{-9 + \sqrt{33}}{4}$.

Q 9 Justifier que la fonction f réalise une bijection de l'intervalle $]0; 2]$ vers un certain intervalle J à déterminer.

► Réponse :

Sur l'intervalle $]0; 2]$, f est strictement décroissante (d'après le tableau de variations).

Donc f réalise une bijection de $]0; 2]$ vers $J =]f(2); +\infty[= \left] \frac{1}{2} + \ln(8); +\infty \right[$.

Q 10 Calculer $f\left(-\frac{3}{2}\right)$ puis $(f^{-1})'\left(-\frac{2}{3}\right)$

► Réponse :

On a $f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{2}{3} + \ln(1) = -\frac{2}{3}$.

Par la formule de la dérivée de la fonction réciproque, on a :

$$(f^{-1})'\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right)\right)} = \frac{1}{f'\left(-\frac{3}{2}\right)}$$

$$\text{Or } f'\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 - \left(-\frac{3}{2}\right) - 2}{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 \left(-\frac{3}{2} + 2\right)} = \frac{-\frac{7}{4}}{\frac{9}{4} \cdot \frac{1}{2}} = -\frac{14}{9}.$$

On en déduit que $(f^{-1})'\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{9}{14}$.