# Interrogation N°2A (25')

**Q 1** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $x^2 + 5x + 2 \geqslant 3x - 1$.

▶ **Réponse :**

On calcule la soustraction des deux membres :

$$\begin{aligned} x^2 + 5x + 2 - (3x - 1) &= x^2 + 5x + 2 - 3x + 1 \\ &= x^2 + 2x + 1 + 2 \\ &= (x+1)^2 + 2 > 0 \end{aligned}$$

On déduit alors que : $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 5x + 2 \geqslant 3x - 1$

**Q 2** Résoudre dans $\mathbb{R}$ : $\dfrac{2x}{1-3x} < 5$.

▶ **Réponse :**

On commence par chercher les valeurs interdites : $1 - 3x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{1}{3}$.
On se ramène à une étude de signe :

$$\frac{2x}{1-3x} - 5 < 0 \iff \frac{2x - 5(1-3x)}{1-3x} < 0 \iff \frac{17x-5}{1-3x} < 0$$

Ensuite on conclut avec un tableau de signes :

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{5}{17}$ | | $\frac{1}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $17x - 5$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $1 - 3x$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $\Vert$ | $-$ | |

On déduit alors les solutions : $x \in \left]-\infty; \dfrac{5}{17}\right[ \cup \left]\dfrac{1}{3}; +\infty\right[$

**Q 3** Résoudre dans $\mathbb{R}$ : $|2x - 3| - |x + 1| \leqslant 2$.

▶ **Réponse :**

• **Étape 1 :** on commence par chercher les points où les expressions dans les valeurs absolues changent de signe et on reporte ces résultats dans un tableau de signes :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $\frac{3}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x - 3$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x + 1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |

• **Étape 2 :** on étudie l'inéquation dans chacun des 3 intervalles :

$$I_1 = ]-\infty; -1[,\ \ I_2 = \left[-1; \frac{3}{2}\right] \text{ et } I_3 = \left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$$

.

- Cas 1 : si $x \in I_1$, alors l'inéquation devient :

$$|2x-3| - |x+1| \leqslant 2 \iff -(2x-3)+(x+1) \leqslant 2 \iff -x+4 \leqslant 2 \iff x \geqslant 2$$

Or $I_1 \cap ]2;+\infty[ = \emptyset$, donc pas de solutions sur $I_1$.

- Cas 2 : si $x \in I_2$, alors l'inéquation devient :

$$|2x-3| - |x+1| \leqslant 2 \iff -(2x-3)-(x+1) \leqslant 2 \iff -3x+2 \leqslant 2 \iff x \geqslant 0$$

Or $I_2 \cap [0;+\infty] = \boxed{\left[0;\frac{3}{2}\right]}$.

- Cas 3 : si $x \in I_3$, alors l'inéquation devient :

$$|2x-3| - |x+1| \leqslant 2 \iff (2x-3)-(x+1) \leqslant 2 \iff x-4 \leqslant 2 \iff x \leqslant 6$$

Or $I_3 \cap [6;\infty[ = \boxed{\left]\frac{3}{2};6\right]}$

- **Étape 3 conclusion :** on rassemble les solutions trouvées dans chaque intervalle : $\boxed{S = [0;6]}$.

**Q 4** Résoudre dans $\mathbb{R}$ : $|x-4| > |x+2|$

▶ **Réponse :**

Le plus simple est d'utiliser les distances :

$$|x-4| > |x+2| \iff d(x,4) > d(x,-2)$$

C'est-à-dire que $x$ est plus proche de $-2$ que de 4.
Le point milieu de $[-2;4]$ est 1. On en déduit que :

$$|x-4| > |x+2| \iff \boxed{x < 1}$$