

CONCOURS BLANC

MATHÉMATIQUES/INFORMATIQUE

(4H)

Il sera tenu compte de la qualité de **présentation/rédaction** de votre copie.

Les calculatrices. **NE sont PAS** autorisées.

Les points affichés entre parenthèses sont purement indicatifs et pourront donner lieu à modification.

PARTIE ALGÈBRE LINÉAIRE

Exercice I (Environ 27 points)

Dans cet exercice, les 7 questions sont indépendantes.

Q1 a. L'ensemble F des fonctions continues sur \mathbb{R} et paires est-il un espace vectoriel ? Justifier la réponse.

b. L'ensemble G des suites réelles qui convergent vers 1 est-il un espace vectoriel ? Justifier la réponse.

Q2 Dans $\mathbb{R}_3[X]$ on considère la famille $\mathcal{F}_1 = \{\underbrace{X^2 + X + 1}_{p_1}, \underbrace{X^2 + 3X + 1}_{p_2}, \underbrace{2X}_{p_3}, \underbrace{X^3 + 3}_{p_4}\}$.

a. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$? (*Aucune justification n'est demandée.*)

b. En remarquant que $p_2 = p_1 + p_3$, que pouvez-vous déduire quant-à la liberté de la famille \mathcal{F}_1 ?

c. Quel est le rang de la famille \mathcal{F}_1 ?

d. Est-ce que $\text{Vect}(\mathcal{F}_1) = \mathbb{R}_3[X]$?

Q3 Dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ on considère la famille $\mathcal{F}_2 = \{\cos, \sin, 1\}$.

a. Montrer soigneusement que cette famille est libre.

b. Est-ce une base de l'espace-vectoriel $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$? Justifier la réponse.

Q4 Dans \mathbb{R}^3 on considère $F = \text{Vect}((1, 1, -2), (-2, 1, 1))$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$.

a. Déterminer la dimension de F .

b. Soit u l'application de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R} définie par $u(x, y, z) = x + y + z$.
Montrer rapidement que u est une forme linéaire.

c. En déduire la dimension de G (*on pourra utiliser le théorème du rang...*).

d. Montrer que $F = G$.

e. On considère enfin $H = \text{Vect}((1, 1, 1))$. Les espaces F et H sont-ils supplémentaires dans \mathbb{R}^3 ?

Q5 Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ définie par $f : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$
 $P \mapsto (X+1)P'' + 2P'$

On note $B_3 = (1, X, X^2, X^3)$ et $B_2 = (1, X, X^2)$ les bases canoniques de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathbb{R}_2[X]$ respectivement.

a. Donner $A = \mathcal{M}_{B_2, B_3}(f)$, la matrice de f dans les bases B_3 et B_2 .

b. Quel est le rang de f ?

c. Quel est le noyau de f ?

Q6 Dans \mathbb{R}^4 on considère le sous-espace vectoriel $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x - 2y = 0 \text{ et } y + z - 3t = 0\}$. Déterminer une base de F .

Q7 On note f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \\ -1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$.

a. Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$.

b. Quel est le rang de f ? Est-elle surjective ?

c. Vérifier que $\text{Ker}(f) \subset \text{Im}(f)$.

d. $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont-ils supplémentaires ?

Exercice II (Environ 12 points)

On note $M = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ la matrice d'un endomorphisme f de \mathbb{R}^3 dans la base canonique \mathcal{B} .

On considère les trois vecteurs u , v et w dont les matrices dans la base canonique \mathcal{B} sont

$$U = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad V = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad W = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(w) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Q 8 Montrer que $f(u) = u$, $f(v) = 2v$ et $f(w) = 3w$.

Q 9 Montrer que $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de \mathbb{R}^3

Q 10 Déterminer $D = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f)$.

Q 11 Déterminer la matrice de passage P de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{B}' .

Q 12 Montrer que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Q 13 Exprimer M en fonction de D , P et P^{-1} .

Q 14 En déduire l'expression de M^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice III (Environ 10 points)

Dans ce problème, $E = \mathbb{R}_2[X]$ désigne le \mathbb{R} -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 2.

Si a_0, a_1, a_2 sont 3 réels et Q est le polynôme défini par $Q = a_0 + a_1X + a_2X^2$, on définit le polynôme $s(Q)$ par $s(Q) = a_2 + a_1X + a_0X^2$.

Autrement dit, $s(Q)$ est le polynôme obtenu à partir de Q en *inversant l'ordre des coefficients*.

Q 15 Montrer que l'application $s : Q \mapsto s(Q)$ est un endomorphisme de E .

Q 16 Vérifier que $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice de l'endomorphisme s dans la base canonique $B = (1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

Q 17 On note $M_1 = M - Id_3$ (où Id_3 est la matrice identité de \mathbb{R}^3) et $\text{Ker}(M_1)$ le noyau de M_1 .
Déterminer une base B_1 de $\text{Ker}(M_1)$.

Q 18 On note $M_2 = M + Id_3$ (où Id_3 est la matrice identité de \mathbb{R}^3) et $\text{Ker}(M_2)$ le noyau de M_2 .
Déterminer une base B_2 de $\text{Ker}(M_2)$.

Q 19 Montrer $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(M_1) \oplus \text{Ker}(M_2)$.

Q 20 Donner la matrice de s dans la base $B_3 = B_1 \cup B_2$.