

DEVOIR SURVEILLÉ N°6 (3H)

Les calculatrices **ne sont pas** autorisées. Il sera grandement tenu compte de la qualité de la rédaction et de la présentation. Les exercices sont indépendants.

Exercice I (Polynômes 1)

Dans cet exercice on se propose de trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(0) = 0$ et $P(X^2 + 1) = (P(X))^2 + 1$.

- Q1** Déterminer $P(1)$, puis $P(2)$, puis $P(5)$ et enfin $P(5^2 + 1)$. Introduisons maintenant la suite définie par $u_{n+1} = u_n^2 + 1$ et $u_0 = 0$. On admettra sans avoir besoin de le démontrer que celle-ci est strictement croissante.
- Q2** Prouver avec une petite récurrence que $P(u_n) = u_n$ pour tout entier naturel n .
- Q3** En posant $Q(X) = P(X) - X$, montrer que le seul polynôme éventuellement solution du problème est $P(X) = X$.
- Q4** Conclure sur l'ensemble des solutions du problème.

Exercice II (Polynômes 2)

Les deux questions sont indépendantes...

- Q5** Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On sait que le reste de la division euclidienne de P par $(X - 2)$ est 1, et celui de P par $(X - 3)$ est 2. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X - 2)(X - 3)$.
- Q6** Soit a, b et c trois nombres réels. On considère les polynômes $P = X^4 - 3X^3 + aX^2 + bX + c$ et $Q = (X - 2)(X - 1)^2$. Déterminer les valeurs de a, b et c pour que Q divise P .

Exercice III (Développements limités)

Les deux parties sont indépendantes...

Partie 1 : Étude d'une suite

On considère la suite (a_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $a_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \ln(n)$.

- Q7** On considère la suite $b_n = a_{n+1} - a_n$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $b_n = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$.
- Q8** Déterminer un équivalent de b_n , lorsque n tend vers $+\infty$.
- Q9** On admettra que la suite (a_n) est positive. En utilisant la question précédente, justifier soigneusement que (a_n) est convergente ?

Partie 2 : Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}_+^* par $f(x) = \frac{1}{1 - e^{-x}} - \frac{1}{x}$.

- Q10** Donner le développement limité en 0 à l'ordre 4 de $\frac{1}{1-u}$.
- Q11** Donner le développement limité en 0 à l'ordre 5 de e^{-x} .
- Q12** Montrer qu'au voisinage de 0 on a : $\frac{1}{1 - e^{-x}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2} + \frac{x}{12} - \frac{x^3}{720} + o(x^3)$
- Q13** Donner enfin le développement limité en 0 à l'ordre 3 de $f(x)$ pour en déduire la limite de f en 0, l'équation de la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 0 et la position de cette courbe par rapport à la tangente au voisinage de 0.

Exercice IV (Espaces vectoriels)

Les questions sont indépendantes...

- Q 14** On note E_1 l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées à deux lignes et deux colonnes. On considère l'ensemble F_1 des matrices de E_1 dont le coefficient en ligne 1 et colonne 1 (en haut à gauche) est nul. F_1 est-il un sous-espace vectoriel de E_1 ? (Justifier)
- Q 15** On note E_2 l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions continues sur \mathbb{R} . On considère l'ensemble F_2 des fonctions de E_2 qui sont croissantes. F_2 est-il un sous-espace vectoriel de E_2 ? (Justifier)
- Q 16** Dans $E_3 = \mathbb{R}^4$, on considère les sous-espaces vectoriels $F_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + t = 0\}$ et $G_3 = \text{Vect}\{(2, -1, 0, 1)\}$. Démontrer que F_3 et G_3 sont supplémentaires.
- Q 17** Dans l'espace vectoriel E des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , on considère la famille $\mathcal{F} = \{\cos x, \sin x, \sin 2x\}$. La famille \mathcal{F} est-elle libre ? Est-elle génératrice de E ?

Exercice V (Applications linéaires)

On considère l'espace vectoriel $E_1 = \mathbb{R}_1[X]$ des polynômes de degré au plus 1 et $E_2 = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ celui des matrices carrées à deux lignes et deux colonnes. On note :

- $\mathcal{B}_r = \{1\}$ la base canonique de \mathbb{R} .
 - $\mathcal{B}_p = (1, X)$ la base canonique de E_1 .
 - $\mathcal{B}_m = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ la base canonique de E_2 .
 - $\mathcal{B}' = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ une famille de E_2 avec $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
 - $\text{Tr} : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, l'application qui à toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E_2$ associe la somme de ses termes diagonaux, c'est à dire $\text{Tr}(M) = a + d$ (vous verrez l'année prochaine que cette application s'appelle la *trace*).
 - $\varphi : E_1 \rightarrow E_2$ définie par $\varphi(P) = P(1)A_1 + P(2)A_2$.
- Q 18** Donner la matrice P_1 de la famille \mathcal{B}' dans la base \mathcal{B}_m .
- Q 19** Montrer que pour toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E_2$, il existe un unique quadruplet de réels (x, y, z, t) tel que $xA_1 + yA_2 + zA_3 + tA_4 = M$. Qu'en déduit-on pour la famille \mathcal{B}' ?
- Q 20** En déduire la matrice de passage P_2 de la base \mathcal{B}' à la base \mathcal{B}_m .
- Q 21** Montrer que l'application Tr est linéaire.
- Q 22** Tr est-elle surjective ? (Justifier)
- Q 23** Tr est-elle injective ? (Justifier)
- Q 24** Déterminer la matrice de Tr dans les bases \mathcal{B}' et \mathcal{B}_r .
- Q 25** Montrer que φ est une application linéaire.
- Q 26** Déterminer la matrice de φ dans les bases \mathcal{B}_p et \mathcal{B}_m .
- Q 27** Déterminer le noyau de φ puis conclure quant à l'injectivité de φ .

Exercice VI (Un petit extrait de problème...)

Dans tout le problème n désigne un entier naturel. $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n dont la base canonique est $e = (1, X, \dots, X^n)$.

On considère les deux applications u et v de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ définies par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad u(P) = P(X+1), \quad v(P) = P(X-1).$$

Partie I - Cas particulier $n = 2$

Dans cette partie uniquement, on suppose que $n = 2$.

Q 28 Démontrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ et que la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est donnée par :

$$\text{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Q 29 On s'intéresse à la matrice $\text{Mat}_e(u)$ obtenue précédemment. Justifier que cette matrice est inversible et calculer son inverse.

Partie II - Des matrices « semblables » à leurs inverses

On revient au cas général (avec $n \in \mathbb{N}$ quelconque)

On admet que u et v sont deux endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$.

On appelle matrice supérieure de Pascal la matrice notée $U \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ représentative de u dans la base canonique e de $\mathbb{R}_n[X]$ (on numérottera les lignes et les colonnes de U par i et j appartenant à $\llbracket 0, n \rrbracket$).

Q 30 Montrer que U est triangulaire supérieure puis démontrer que pour tout $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$ le coefficient d'indice (i, j) de U est égal à $\binom{j}{i}$ (c'est à dire « i parmi j »). La matrice U est-elle inversible ? (Justifier)

Q 31 Déterminer $u \circ v$, et en déduire que u est bijective. Déterminer le coefficient d'indice (i, j) de la matrice U^{-1} . Ce résultat est-il cohérent avec la matrice inverse calculé en Q 29 ?

Q 32 On note D la matrice diagonale de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ tel que pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, le i -ème coefficient diagonal est $(-1)^i$. Démontrer que D est inversible et égale à son inverse.

Q 33 Calculer DU et $U^{-1}D$ et en déduire que $U^{-1} = DUD$. (On dira dans ce cas que U est semblable à son inverse...)