# Devoir surveillé N°6 (3h)

Les calculatrices **ne sont pas** autorisées. Il sera grandement tenu compte de la qualité de la rédaction et de la présentation. Les exercices sont indépendants.

## Exercice I (Polynômes 1)

Dans cet exercice on se propose de trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(0) = 0$ et $P(X^2+1) = (P(X))^2 + 1$.

**Q 1** Déterminer $P(1)$, puis $P(2)$, puis $P(5)$ et enfin $P(5^2+1)$.

▶ **Réponse :**

En remplaçant X par 0 dans l'égalité fonctionnelle, on trouve :

$$P(1) = P(0^2+1) = (P(0))^2 + 1 = \boxed{1}$$

En remplaçant X par 1, on trouve :

$$P(2) = P(1^2+1) = (P(1))^2 + 1 = \boxed{2}$$

En remplaçant X par 2, on trouve :

$$P(5) = P(2^2+1) = (P(2))^2 + 1 = \boxed{5}$$

Enfin, en remplaçant X par 5, on trouve :

$$P(5^2+1) = P(26) = (P(5))^2 + 1 = \boxed{26}$$

Introduisons maintenant la suite définie par $u_{n+1} = u_n^2 + 1$ et $u_0 = 0$. On admettra sans avoir besoin de le démontrer que celle-ci est strictement croissante.

**Q 2** Prouver avec une petite récurrence que $P(u_n) = u_n$ pour tout entier naturel $n$.

▶ **Réponse :**

On va montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(u_n) = u_n$.
Initialisation : $P(u_0) = P(0) = 0 = u_0$.
Hérédité : Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait $P(u_n) = u_n$. Alors :

$$P(u_{n+1}) = P(u_n^2 + 1) = (P(u_n))^2 + 1 = u_n^2 + 1 = u_{n+1}$$

Par conséquent, la propriété est vérifiée pour tout entier naturel $n$.

**Q 3** En posant $Q(X) = P(X) - X$, montrer que le seul polynôme éventuellement solution du problème est $P(X) = X$.

▶ **Réponse :**

En posant $Q(X) = P(X) - X$, on trouve que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q(u_n) = P(u_n) - u_n = 0$.
Ainsi Q admet une infinité de racines (car la suite $(u_n)$ est strictement croissante), ce qui n'est possible que si Q est le polynôme nul.
Par conséquent, $P(X) = X$ est la seule solution du problème.

**Q 4** Conclure sur l'ensemble des solutions du problème.

▶ **Réponse :**

D'après la question précédente, $P(X) = X$ est la seule solution possible du problème. Il reste alors à vérifier que cette solution convient bien.
En remplaçant $P(X)$ par X dans l'égalité fonctionnelle, on trouve :

$$P(X^2+1) = (X^2+1) = (P(X))^2 + 1$$

Par conséquent, $P(X) = X$ est bien la seule solution du problème.

## Exercice II (Polynômes 2)

**Les deux questions sont indépendantes...**

**Q 5** Soit $P$ un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On sait que le reste de la division euclidienne de $P$ par $(X-2)$ est 1, et celui de $P$ par $(X-3)$ est 2. Déterminer le reste de la division euclidienne de $P$ par $(X-2)(X-3)$.

▶ **Réponse :**

D'après l'énoncé on a $P(2) = 1$ et $P(3) = 2$. En effectuant la division euclidienne de $P$ par $(X-2)(X-3)$, on trouve :

$$P(X) = (X-2)(X-3)Q(X) + aX + b$$

En remplaçant $X$ par 2 et $X$ par 3, on trouve :

$$\begin{cases} 2a + b &= 1 \\ 3a + b &= 2 \end{cases}$$

En résolvant ce système, on trouve $a = 1$ et $b = -1$. Par conséquent, le reste de la division euclidienne de $P$ par $(X-2)(X-3)$ est $\boxed{X-1}$.

**Q 6** Soit $a$, $b$ et $c$ trois nombres réels. On considère les polynômes $P = X^4 - 3X^3 + aX^2 + bX + c$ et $Q = (X-2)(X-1)^2$. Déterminer les valeurs de $a$, $b$ et $c$ pour que $Q$ divise $P$.

▶ **Réponse :**

SI $Q$ divise $P$ alors 2 est une racine simple (au moins) de $P$ et 1 est une racine double (au moins) de $P$. On obtient donc le système suivant à résoudre :

$$\begin{cases} P(1) = 0 \\ P'(1) = 0 \\ P(2) = 0 \end{cases}$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} 1 - 3 + a + b + c = 0 \\ 4 - 9 + 2a + b = 0 \\ 16 - 24 + 4a + 2b + c = 0 \end{cases}$$

Soit encore en simplifiant : $\begin{cases} a + b + c = 2 \\ 2a + b = 5 \\ 4a + 2b + c = 8 \end{cases}$

En résolvant ce système (méthode de la matrice associée par exemple), on trouve $a = 1$, $b = 3$ et $c = -2$. Par conséquent, les valeurs de $a$, $b$ et $c$ pour que $Q$ divise $P$ sont $\boxed{a = 1, b = 3, c = -2}$.

## Exercice III (Développements limités)

**Les deux parties sont indépendantes...**

### Partie 1 : Étude d'une suite

On considère la suite $(a_n)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $a_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n)$.

**Q 7** On considère la suite $b_n = a_{n+1} - a_n$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $b_n = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$.

▶ **Réponse :**

$$b_n = a_{n+1} - a_n = \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}\right) - \ln(n+1) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$$

**Q 8** Déterminer un équivalent de $b_n$, lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

▶ **Réponse :**

En utilisant le développement limité de $\ln(1-u)$ en 0 à l'ordre 2, on trouve :

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = -\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

d'où :

$$b_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{-1}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \boxed{-\frac{1}{2n^2}}$$

**Q 9** On admettra que la suite $(a_n)$ est positive. En utilisant la question précédente, justifier soigneusement que $(a_n)$ est convergente ?

▶ **Réponse :**

D'après la question précédente, pour $n$ assez grand on a $b_n < 0$ (car l'équivalent de $b_n$est négatif et le signe est conservé).
On déduit donc que la suite $(a_n)$ est décroissante à partir d'un certain rang.
Comme $(a_n)$ est minorée par 0, elle converge vers un réel $\ell \geqslant 0$.
(Pour information, cette constante est notée $\gamma$ et s'appelle la constante d'Euler).

## Partie 2 : Étude d'une fonction

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{1-e^{-x}} - \dfrac{1}{x}$.

**Q 10** Donner le développement limité en 0 à l'ordre 4 de $\dfrac{1}{1-u}$.

▶ **Réponse :**

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + u^4 + o(u^4)$$

**Q 11** Donner le développement limité en 0 à l'ordre 5 de $e^{-x}$.

▶ **Réponse :**

En utilisant le développement limité de $e^x$ en 0 à l'ordre 5, on trouve :

$$e^{-x} = \sum_{k=0}^{5} \frac{(-x)^k}{k!} + o(x^5) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

**Q 12** Montrer qu'au voisinage de 0 on a : $\dfrac{1}{1-e^{-x}} = = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{12} - \dfrac{x^3}{720} + o(x^3)$

▶ **Réponse :**

Cette fois-ci il faut procéder soigneusement et avec méthode !

En utilisant les développements limités précédents, on trouve :

$$\frac{1}{1-e^{-x}} = \frac{1}{1-\left(1-x+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^4}{24}-\dfrac{x^5}{120}+o(x^5)\right)} = \frac{1}{x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}-\dfrac{x^4}{24}+\dfrac{x^5}{120}+o(x^5)}$$

En factorisant par $x$, on trouve :

$$\frac{1}{1-e^{-x}} = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{x^3}{24}+\dfrac{x^4}{120}+o(x^4)}$$

On pose $u=\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{x^3}{24}-\dfrac{x^4}{120}+o(x^4)$ et on utilise le développement limité de $\dfrac{1}{1-u}$ en 0 à l'ordre 4. Pour cela on a besoin de calculer les puissances de $u$ :

$$\begin{aligned}
u &= \frac{x}{2}-\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}-\frac{x^4}{120}+o(x^4)\\
u^2 &= \frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{36}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+o(x^4) = \frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{6}+\frac{5x^4}{72}+o(x^4)\\
u^3 &= \frac{x^3}{8}-\frac{x^4}{12}-\frac{x^4}{24}+o(x^3) = \frac{x^3}{8}-\frac{x^4}{8}+o(x^4)\\
u^4 &= \frac{x^4}{16}+o(x^4)
\end{aligned}$$

On trouve alors en remplaçant dans le développement de $\dfrac{1}{1-u}$ :

$$\frac{1}{1-e^{-x}} = \frac{1}{x}\left(1+u+u^2+u^3+u^4+o(u^4)\right) = \frac{1}{x}\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}-\frac{x^4}{720}+o(x^4)\right) = \boxed{\frac{1}{x}+\frac{1}{2}+\frac{x}{12}-\frac{x^3}{720}+o(x^3)}$$

**Q 13** Donner enfin le développement limité en 0 à l'ordre 3 de $f(x)$ pour en déduire la limite de $f$ en 0, l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 et la position de cette courbe par rapport à la tangente au voisinage de 0.

▶ **Réponse :**

En utilisant le développement précédent, on trouve :

$$f(x) = \frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x} = \frac{1}{2}+\frac{x}{12}-\frac{x^3}{720}+o(x^3)$$

On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \boxed{\dfrac{1}{2}}$.

On a directement une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 est : $\boxed{y=\dfrac{1}{2}+\dfrac{x}{12}}$.

Enfin, au voisinage de 0 on a :

$$f(x)-\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{12}\right) \sim -\frac{x^3}{720}$$

Comme l'équivalent de $f(x)-\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{x}{12}\right)$ change de signe au voisinage de 0, on en déduit que la courbe $\mathscr{C}_f$ traverse sa tangente au voisinage de 0.

$\boxed{\mathscr{C}_f \text{ est au-dessus de sa tangente pour } x<0 \text{ et en dessous pour } x>0}$.

## Exercice IV (Espaces vectoriels)

**Les questions sont indépendantes...**

**Q 14** On note $E_1$ l'espace vectoriel $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées à deux lignes et deux colonnes. On considère l'ensemble $F_1$ des matrices de $E_1$ dont le coefficient en ligne 1 et colonne 1 (en haut à gauche) est nul.
$F_1$ est-il un sous-espace vectoriel de $E_1$ ? (Justifier)

▶ Réponse :

$F_1$ est un sev de $E_1$. En effet, $F_1$ est non vide (car la matrice nulle appartient à $F_1$) et pour tout $A, B \in F_1$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$A + B \in F_1 \quad \text{et} \quad \lambda A \in F_1$$

car les coefficients en ligne 1 et colonne 1 de $A + B$ et de $\lambda A$ sont nuls.

**Q 15** On note $E_2$ l'espace vectoriel $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}$. On considère l'ensemble $F_2$ des fonctions de $E_2$ qui sont croissantes.
$F_2$ est-il un sous-espace vectoriel de $E_2$ ? (Justifier)

▶ Réponse :

$F_2$ n'est pas un sev de $E_2$. En effet, $F_2$ est non vide (car la fonction nulle appartient à $F_2$) mais il existe des fonctions croissantes dont le produit par un réel négatif n'est pas croissante. Par exemple, la fonction identité est croissante mais son produit par -1 ne l'est pas.

**Q 16** Dans $E_3 = \mathbb{R}^4$, on considère les sous-espaces vectoriels $F_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + t = 0\}$ et $G_3 = \mathrm{Vect}\{(2, -1, 0, 1)\}$. Démontrer que $F_3$ et $G_3$ sont supplémentaires.

▶ Réponse :

Avec la notion de dimension, cette question deviendra très rapide, mais ici nous devons nous en passer... Montrons que $F_3$ et $G_3$ sont supplémentaires en montrant que tout élément de $\mathbb{R}^4$ s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de $F_3$ et d'un élément de $G_3$.

- Pour cela commençons par trouver une famille génératrice de $F_3$ :
  $(x, y, z, t) \in F_3 \Leftrightarrow x = -y - z - t \Leftrightarrow (x, y, z, t) = y(-1, 1, 0, 0) + z(-1, 0, 1, 0) + t(-1, 0, 0, 1)$
  Par conséquent, $F_3 = \mathrm{Vect}\{(-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)\}$.
- Montrons alors que tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de $F_3$ et d'un élément de $G_3$, c'est à dire que le système suivant est compatible et admet une unique solution :

$$(x, y, z, t) = a(-1, 1, 0, 0) + b(-1, 0, 1, 0) + c(-1, 0, 0, 1) + d(2, -1, 0, 1)$$

  Ce système est équivalent au système suivant : $\begin{cases} -a - b - c + 2d = x \\ a \qquad\quad - d = y \\ \quad b \qquad\quad = z \\ \qquad c + d = t \end{cases}$

  En faisant $L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3 + L_4$, et en la mettant en dernière position on trouve le système équivalent suivant :

$$\begin{cases} a \qquad\quad - d = y \\ \quad b \qquad\quad = z \\ \qquad c + d = t \\ \qquad\quad 2d = x + y + z + t \end{cases}$$

  Ce système est compatible et admet une unique solution (4 pivots). On déduit que $\boxed{\mathbb{R}^4 = F_3 \oplus G_3}$.

**Q 17** Dans l'espace vectoriel $E$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on considère la famille $\mathscr{F} = \{\cos x, \sin x, \sin 2x\}$.
La famille $\mathscr{F}$ est-elle libre ? Est-elle génératrice de $E$ ?

▶ **Réponse :**

- On considère la combinaison linéaire suivante (valable pour tout $x \in \mathbb{R}$) :

$$\lambda_1 \cos x + \lambda_2 \sin x + \lambda_3 \sin 2x = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

En remplaçant $x$ par 0, on trouve $\lambda_1 = 0$ et l'équation devient :

$$\lambda_2 \sin x + \lambda_3 \sin 2x = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

En remplaçant ensuite $x$ par $\frac{\pi}{2}$, on trouve $\lambda_2 = 0$ et l'équation devient :

$$\lambda_3 \sin 2x = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

On trouve donc également$\lambda_3 = 0$. Par conséquent, la famille $\mathscr{F}$ est libre.

- La famille $\mathscr{F}$ n'est pas génératrice de $E$. En effet, il existe des fonctions de $E$ qui ne sont pas linéairement engendrées par $\mathscr{F}$. Par exemple, la fonction identité (non bornée) n'est pas linéairement engendrée par $\mathscr{F}$ car toute combinaison linéaire de fonctions de $\mathscr{F}$ donne nécessairement une fonction bornée.

## Exercice V (Applications linéaires)

On considère l'espace vectoriel $E_1 = \mathbb{R}_1[X]$ des polynômes de degré au plus 1 et $E_2 = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ celui des matrices carrées à deux lignes et deux colonnes. On note :

- $\mathscr{B}_r = \{1\}$ la base canonique de $\mathbb{R}$.
- $\mathscr{B}_p = (1, X)$ la base canonique de $E_1$.
- $\mathscr{B}_m = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ la base canonique de $E_2$.
- $\mathscr{B}' = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ une famille de $E_2$ avec $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- $\mathrm{Tr} : \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, l'application qui à toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E_2$ associe la somme de ses termes diagonaux, c'est à dire $\mathrm{Tr}(M) = a + d$ (vous verrez l'année prochaine que cette application s'appelle la *trace*).
- $\varphi : E_1 \to E_2$ définie par $\varphi(P) = P(1)A_1 + P(2)A_2$.

**Q 18** Donner la matrice $P_1$ de la famille $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}_m$.

▶ **Réponse :**

En exprimant les éléments de $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}_m$, on trouve :

$$P_1 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_m}(\mathscr{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Q 19** Monter que pour toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E_2$, il existe un unique quadruplet de réels $(x, y, z, t)$ tel que $xA_1 + yA_2 + zA_3 + tA_4 = M$. Qu'en déduit-on pour la famille $\mathscr{B}'$ ?

▶ **Réponse :**

On étudie le système suivant :

$$\begin{cases} x \quad + z \quad = a \\ \quad y \quad - t = b \\ \quad y \quad + t = c \\ x \quad - z \quad = d \end{cases}$$

qui est équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} x \quad + z \quad = a \\ \quad y \quad + t = c \\ x \quad\quad = \dfrac{a+d}{2} \\ \quad y \quad\quad = \dfrac{b+c}{2} \end{cases}$$

Le quadruplet $(x, y, z, t)$ est donc bien unique et égal à $\left(\dfrac{a+d}{2}, \dfrac{b+c}{2}, \dfrac{a-d}{2}, \dfrac{c-b}{2}\right)$.

Par conséquent, $\boxed{\text{la famille } \mathscr{B}' \text{ est une base de } E_2}$.

**Q 20** En déduire la matrice de passage $P_2$ de la base $\mathscr{B}'$ à la base $\mathscr{B}_m$.

▶ **Réponse :**

On exprime les éléments de $\mathscr{B}_m$ dans la base $\mathscr{B}'$. Par exemple, pour $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on prend $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$ et $d = 0$ dans le système de la question précédente pour trouver que $M = \frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{2}A_3$. En procédant de même pour les trois autres éléments de $\mathscr{B}_m$, on trouve :

$$P_2 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}_m) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Q 21** Montrer que l'application Tr est linéaire.

▶ **Réponse :**

Soient $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ deux éléments de $E_2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On trouve :

$$\mathrm{Tr}(M+N) = \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}\right) = (a+a') + (d+d') = \mathrm{Tr}(M) + \mathrm{Tr}(N)$$

et

$$\mathrm{Tr}(\lambda M) = \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}\right) = \lambda a + \lambda d = \lambda \mathrm{Tr}(M)$$

Par conséquent, Tr est linéaire.

**Q 22** Tr est-elle surjective ? (Justifier)

▶ **Réponse :**

Tr est surjective. En effet, pour tout $r \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = r$. Par conséquent, $\boxed{\text{Tr est surjective.}}$

**Q 23** Tr est-elle injective ? (Justifier)

▶ **Réponse :**

Tr n'est pas injective. En effet, on a $\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = 0$. Donc le noyau de Tr n'est pas réduit au vecteur nul. Par conséquent, $\boxed{\text{Tr n'est pas injective.}}$

**Q 24** Déterminer la matrice de Tr dans les bases $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}_r$.

▶ **Réponse :**

En exprimant $\mathrm{Tr}(A_1)$, $\mathrm{Tr}(A_2)$, $\mathrm{Tr}(A_3)$ et $\mathrm{Tr}(A_4)$ dans la base $\mathscr{B}_r$, on trouve :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\mathrm{Tr}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Q 25** Montrer que $\varphi$ est une application linéaire.

▶ **Réponse :**

Soit $P = a + bx$ et $Q = a' + bx'$ deux éléments de $E_1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On trouve :

$$\begin{aligned}\varphi(P+Q) &= \begin{pmatrix} (a+b) & 0 \\ 0 & (a+b) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & (2a+b) \\ (2a+b) & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (a'+b') & 0 \\ 0 & (a'+b') \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & (2a'+b') \\ (2a'+b') & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a+a')+(b+b') & 0 \\ 0 & (a+a')+(b+b') \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & (2(a+a')+(b+b')) \\ (2(a+a')+(b+b')) & 0 \end{pmatrix} \\ &= \varphi(P) + \varphi(Q)\end{aligned}$$

et de même avec la multiplication par un scalaire...
Par conséquent, $\boxed{\varphi \text{ est linéaire.}}$

**Q 26** Déterminer la matrice de $\varphi$ dans les bases $\mathscr{B}_p$ et $\mathscr{B}_m$.

▶ **Réponse :**

En exprimant $\varphi(1)$ et $\varphi(X)$ dans la base $\mathscr{B}_m$, on trouve :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_p}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Q 27** Déterminer le noyau de $\varphi$ puis conclure quant à l'injectivité de $\varphi$.

▶ **Réponse :**

Le noyau de $\varphi$ est aussi le noyau de la matrice précédente. Cette matrice est clairement de rang 2 (car les deux colonnes sont linéairement indépendantes). Par conséquent, le noyau de $\varphi$ est réduit au vecteur nul et $\boxed{\varphi \text{ est injective.}}$

## Exercice VI (Un petit extrait de problème...)

Dans tout le problème $n$ désigne un entier naturel. $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $n$ dont la base canonique est $e = \left(1, X, \ldots, X^n\right)$.

On considère les deux applications $u$ et $v$ de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ définies par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad u(P) = P(X+1), \quad v(P) = P(X-1).$$

**Partie I - Cas particulier $n = 2$**

Dans cette partie uniquement, on suppose que $n = 2$.

**Q 28** Démontrer que $u$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ et que la matrice de $u$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est donnée par :

$$\mathrm{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

▶ **Réponse :**

- Si $P$ est un polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$, alors $P(X+1)$ est également un polynôme de degré inférieur ou égal à 2. Par conséquent, $u$ est une application de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.
- De plus, si $P$ et $Q$ sont deux éléments de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $u(P + \lambda Q) = (P + \lambda Q)(X+1) = P(X+1) + \lambda Q(X+1) = u(P) + \lambda u(Q)$. Ainsi, $u$ est linéaire.
- Pour déterminer la matrice de $u$ dans la base canonique, il suffit de calculer $u(1)$, $u(X)$ et $u(X^2)$ et de les exprimer dans la base canonique. On trouve :

  $$u(1) = 1, \quad u(X) = X+1, \quad u(X^2) = (X+1)^2 = X^2 + 2X + 1$$

  Par conséquent, la matrice de $u$ dans la base canonique est donnée par :

  $$\mathrm{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De

**Q 29** On s'intéresse à la matrice $\mathrm{Mat}_e(u)$ obtenue précédemment. Justifier que cette matrice est inversible et calculer son inverse.

▶ **Réponse :**

La matrice $\mathrm{Mat}_e(u)$ est triangulaire supérieure et les éléments de sa diagonale sont tous égaux à 1. Par conséquent, son rang est égal à 3 (car il y a 3 pivots) et la matrice est inversible. On peut utiliser la méthode de la matrice augmentée pour calculer son inverse :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

On fait des opérations élémentaires sur les lignes et on obtient l'inverse :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Par conséquent, $\boxed{\text{Mat}_e(u)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

### Partie II - Des matrices « semblables » à leurs inverses

On revient au cas général (avec $n \in \mathbb{N}$ quelconque)

On admet que $u$ et $v$ sont deux endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$.
On appelle matrice supérieure de Pascal la matrice notée $U \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ représentative de $u$ dans la base canonique $e$ de $\mathbb{R}_n[X]$ (on numérotera les lignes et les colonnes de $U$ par $i$ et $j$ appartenant à $[\![0, n]\!]$ ).

**Q 30** Montrer que $U$ est triangulaire supérieure puis démontrer que pour tout $(i, j) \in [\![0, n]\!]^2$ le coefficient d'indice $(i, j)$ de $U$ est égal à $\binom{j}{i}$ (c'est à dire « i parmi j »). La matrice $U$ est-elle inversible ? (Justifier)

▶ **Réponse :**

- En exprimant $u(X^j)$ dans la base canonique, on trouve :

$$u(X^j) = (X + 1)^j = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} X^k$$

  Par conséquent, le coefficient d'indice $(i, j)$ de $U$ est égal à :

$$\boxed{U_{i,j} = \binom{j}{i} \text{ si } i \leqslant j \text{ et à 0 sinon}}$$

  Par conséquent, $U$ est triangulaire supérieure.
- De plus, les éléments de sa diagonale sont tous égaux à 1 (car $\binom{j}{j} = 1$ pour tout $j \in [\![0, n]\!]$). Par conséquent, le rang de $U$ est égal à $n + 1$ (car il y a $n + 1$ pivots) et la matrice $U$ est inversible.

**Q 31** Déterminer $u \circ v$, et en déduire que $u$ est bijective. Déterminer le coefficient d'indice $(i, j)$ de la matrice $U^{-1}$. Ce résultat est-il cohérent avec la matrice inverse calculé en Q 29 ?

▶ **Réponse :**

- En exprimant $u \circ v(P)$ pour un polynôme $P$ de $\mathbb{R}_n[X]$, on trouve :

$$u \circ v(P) = P(X - 1 + 1) = P(X)$$

  Par conséquent, $u \circ v = id$ et $u$ est bijective (pour une application linéaire, inutile de vérifier l'autre composition), et son inverse est $v$.
- Pour trouver le coefficient d'indice $(i, j)$ de la matrice de $v = u^{-1}$ dans la base canonique, on exprime $v(X^j)$ dans la base canonique :

$$v(X^j) = (X - 1)^j = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} (-1)^{j-k} X^k$$

  Par conséquent, le coefficient d'indice $(i, j)$ de la matrice de $v = u^{-1}$ dans la base canonique est égal à :

$$\boxed{U^{-1}_{i,j} = \binom{j}{i} (-1)^{j-i} \text{ si } i \leqslant j \text{ et à 0 sinon}}$$

- Dans le cas particulier $n = 2$, on retrouve la même matrice avec les coefficients de Pascal et les signes alternés que celle calculée en Q 29 :

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Q 32** On note D la matrice diagonale de $\mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ tel que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, le i-ème coefficient diagonal est $(-1)^i$. Démontrer que D est inversible et égale à son inverse.

▶ **Réponse :**

D est une matrice diagonale dont les éléments de la diagonale sont tous égaux à $\pm 1$. Par conséquent, $D \times D = I$, donc D est inversible et son inverse est égal à lui même. Par conséquent, $\boxed{D^{-1} = D}$.

**Q 33** Calculer $DU$ et $U^{-1}D$ et en déduire que $U^{-1} = DUD$. *(On dira dans ce cas que* $U$ *est semblable à son inverse...)*

▶ **Réponse :**

- Le coefficient $(i, j)$ du produit $DU$ est obtenu en multipliant la i-ème ligne de D par la j-ème colonne de U. Comme D est une matrice diagonale, on trouve :

$$(DU)_{i,j} = (-1)^i U_{i,j} = (-1)^i \binom{j}{i}$$

- De même, le coefficient $(i, j)$ du produit $U^{-1}D$ est obtenu en multipliant la i-ème ligne de $U^{-1}$ par la j-ème colonne de D. On trouve :

$$(U^{-1}D)_{i,j} = U^{-1}_{i,j}(-1)^j = \binom{j}{i}(-1)^{j-i}(-1)^j = \binom{j}{i}(-1)^{2j-i} = \binom{j}{i}(-1)^i$$

  Par conséquent, $U^{-1}D = DU$.
- En multipliant à droite par $D^{-1}$ on trouve $U^{-1} = DUD^{-1} = DUD$ (en utilisant le fait que $D^{-1} = D$).